Polyeder

Einleitung

Polyeder, das heisst durch flache Seiten begrenzte geschlossene Körper, gibt es unendlich viele. Um zu einer *endlichen* Sammlung zu kommen, die wir hier präsentieren wollen, machen wir folgende *Einschränkungen*.

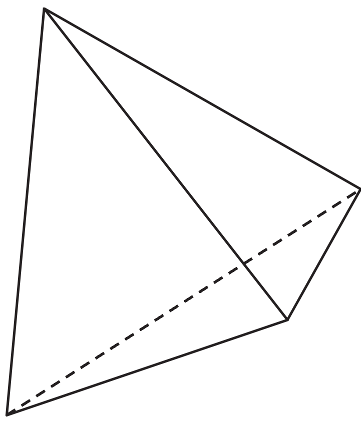
1. Die Körper sollen *konvex* bleiben. Ich schliesse also u.a. alle sternförmigen Polyeder aus.
2. Die Körper sollen lauter *gleichlange Kanten* haben.
3. Die flachen Seiten sollen *nicht mehr als 10 Ecken* haben.

Abwandlungen der regulären Polyeder

Die fünf *regulären* Polyeder sind:

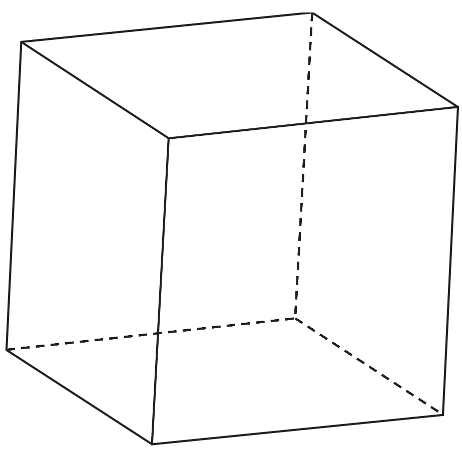
Tetraeder

***tetra



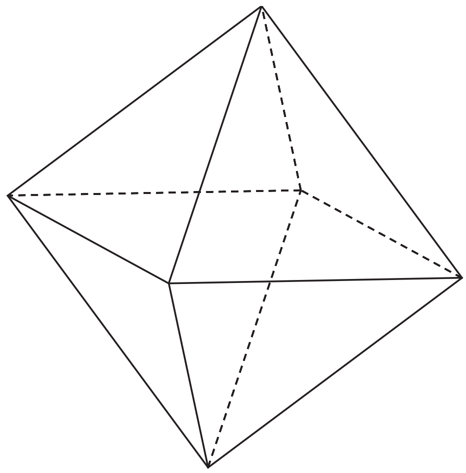
Würfel

***kub



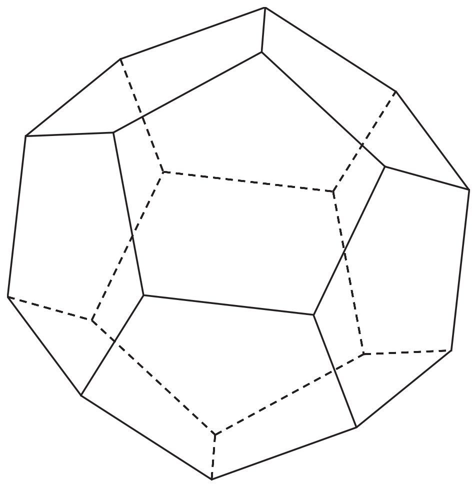
Oktaeder

***okta



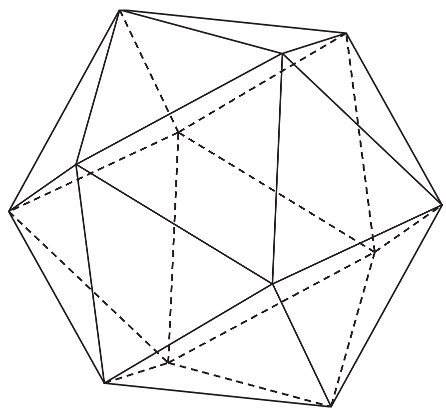
Dodekaeder

***dode



Ikosaeder

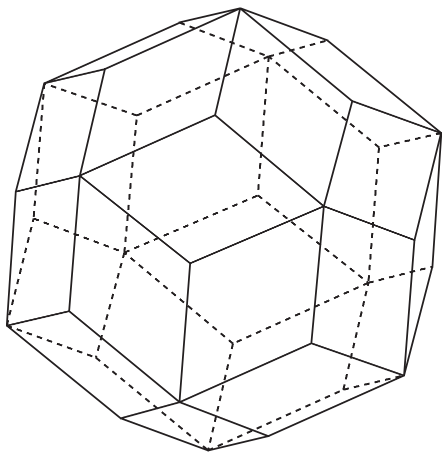
***ikosa



Man erhält zweimal das gleiche Polyeder, wenn man sowohl auf das Dodekaeder wie auf das Ikosaeder folgende Operation anwendet.

F2
Man errichte auf den Seiten des Polyeders Zelte von geeigneter Höhe so, dass der Knick an den alten Kanten verschwindet.

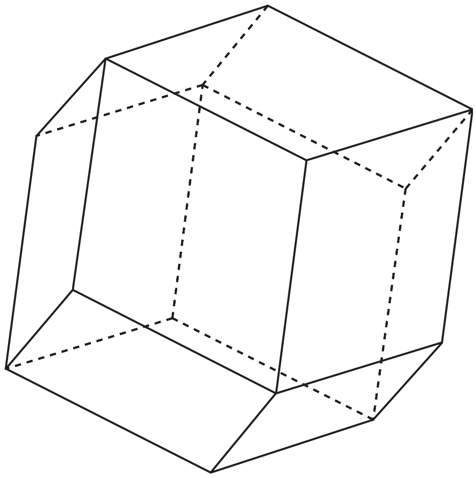
***dodef2



Natürlich werden neue Kanten gebildet. Das neue Polyeder ist das *Rhombentriakontaeder*. Es hat dreissig Rhomben als begrenzende Flächen. Der spitze Winkel der Rhomben beträgt 63.44°. Der Winkel zwischen zwei benachbarten Flächen beträgt 144°. Es gibt eine Ansicht des Rhombentriakontaeders, die genau zehneckig ausfällt und bei der in den Ecken dieser Winkel genau sichtbar wird.

Bei der gleichen Operation liegt in der Mitte zwischen den dualen Polyedern Würfel und Oktaeder das *Rhombendodekaeder*. Bei ihm hat das Rhombus einen spitzen Winkel von 70.53° und benachbarte Flächen bilden den Winkel 120°. Es gibt eine Ansicht die genau sechseckig ausfällt.

***kubf2



F2 angewandt auf das Tetraeder liefert den Würfel! Je 2 Dreiecke verschmelzen zu einem Quadrat.

Die Operation

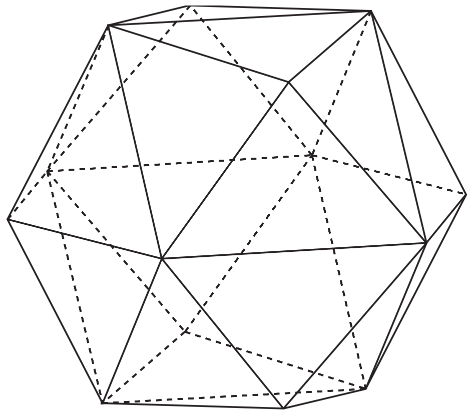
F1
Man errichte auf den Seiten des Polyeders Zelte von geeigneter Höhe, sodass genau die umschriebene Kugel erreicht wird.

ist auch angewandt worden. Beim Tetraeder liefert sie den Würfel! Die 4 neuen Ecken liegen gleichweit vom Tetraederzentrum (=Würfelzentrum).

In der neu gebildeten Ecke von F1(Würfel) bilden zwei Kanten einen Winkel von 77.8°.

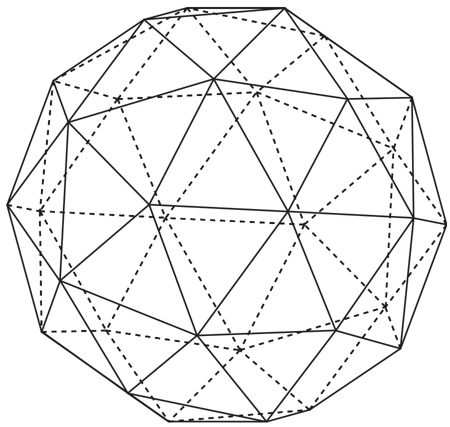
Im allgemeinen liefert F1 keine Gleichkanter.

***kubf1



In der neu gebildeten Ecke von F1(Dodekaeder) bilden zwei Kanten einen Winkel von 67.67°.

***dodef1



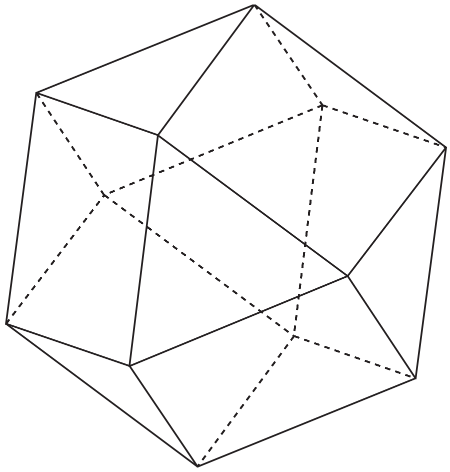
F1 vom Oktaeder und vom Ikosaeder sind nicht konvex.

Mit einer anderen Operation, nämlich

E2
Man stumpfe die Ecken bis zur Mitte der Kanten ab.

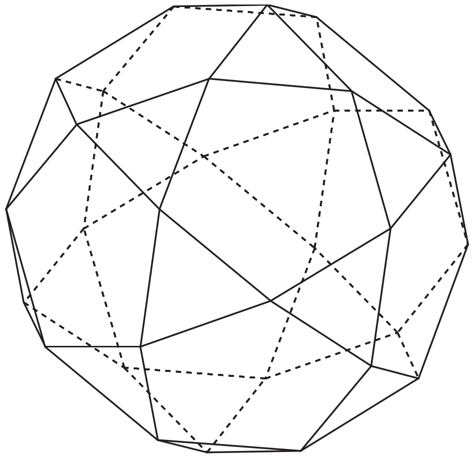
liegen zwei andere Polyeder in der 'Mitte' zwischen den dualen regelmässigen Polyedern: Zwischen Würfel und Oktaeder das *Kubooktaeder*,

***kubokta



mit gleichseitigen 3- und 4-Ecken als begrenzenden Flächen, und zwischen Dodekaeder und Ikosaeder das *Dodekaikosaeder*,

***dodeiko



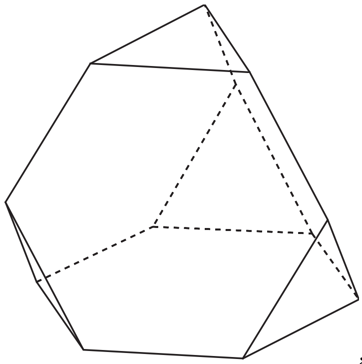
mit gleichseitigen 3- und 5-Ecken als begrenzenden Flächen. Aus dem Tetraeder entsteht unter E2 das Oktaeder!

Mit der Operation

E1
Man stumpfe die Ecken bis zu ca einem Drittel der Kanten bis gleichlange neue Kanten ab.

erhält man nicht das gleiche Polyeder, wenn man von den beiden dualen Polyedern startet. Beim Tetraeder erhält man gleichseitige 3- und 6-Ecke

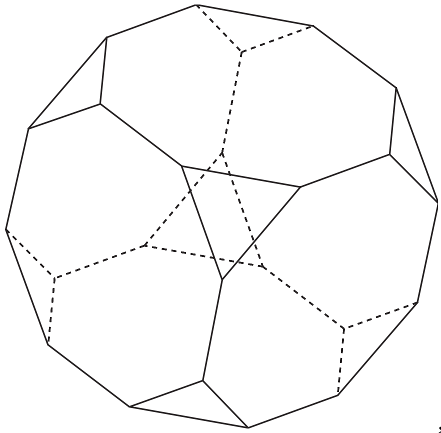
***tetrae1



,

beim Würfel 3- und 8-Ecke

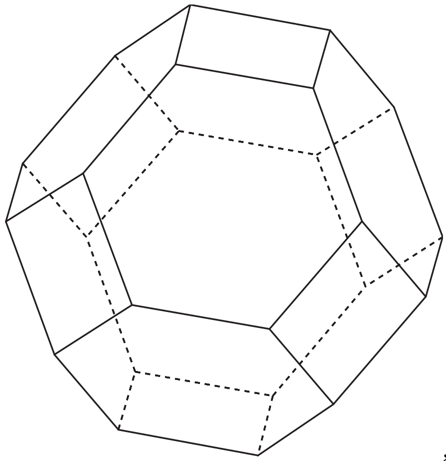
***kube1



,

beim Oktaeder 4- und 6-Ecke

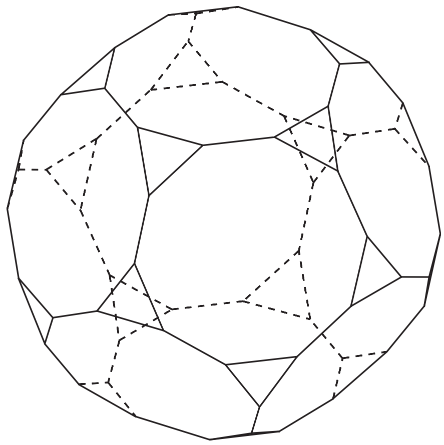
***oktae1



,

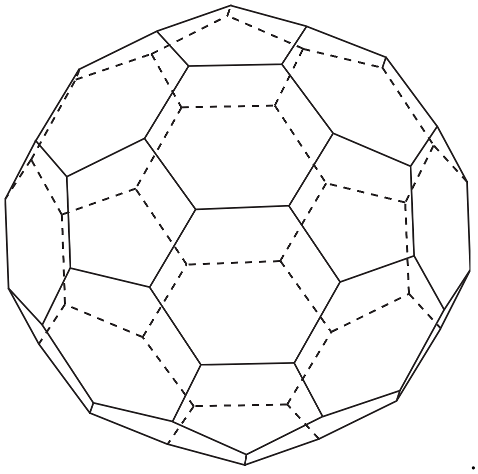
beim Dodekaeder 3- und 10-Ecke

***dodee1



und beim Ikosaeder 5- und 6-Ecke

***ikosae1



Das letzte ist besonders schön. Es ist das Polyeder des "Fussballs". Es existiert auf Molekularebene: das *Fulleren*.

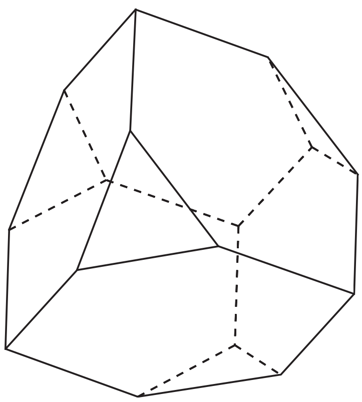
Die Operation

K
Man stumpfe die Kanten bis gleichlange neue Kanten ab.

Für alle 5 mit K abgeleiteten Polyeder gilt: Die 6-Ecke sind dabei zwar gleichseitig, aber nicht (!) gleichwinklig. Eine Diagonale ist grösser.

K vom Tetraeder ist ein Tri-Hexa-10-Eder.

***tetrak

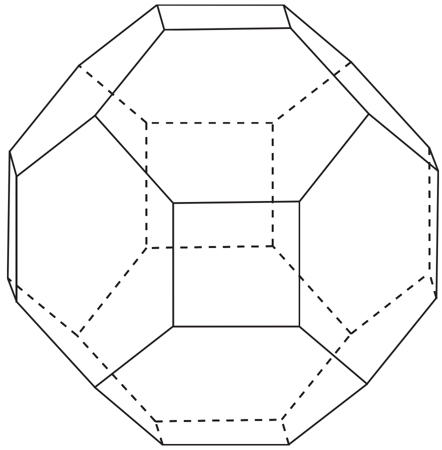


Die 2 verschiedenen Winkel sind 135° und 90°.

K(T) = 'E1(W)', wenn dabei nur die Hälfte der Ecken behandelt werden, wobei immer eine Ecke zu überspringen ist!

K vom Würfel ist ein Quadra-Hexa-18-Eder.

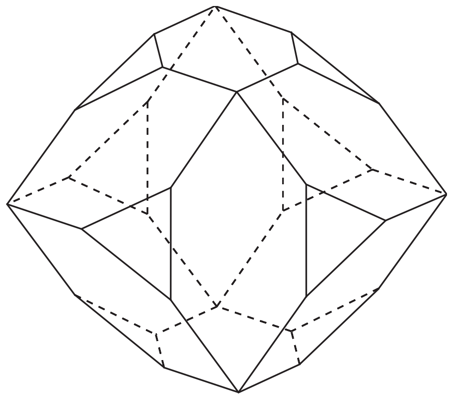
***kubk



Die 2 verschiedenen Winkel sind 125.26° und 109.47°.

K vom Oktaeder ist ein Tria-Hexa-20-Eder.

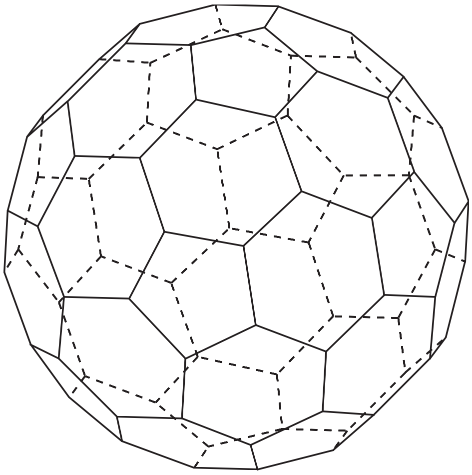
***oktak



Die 2 verschiedenen Winkel sind 144.73° und 70.53°.

K vom Dodekaeder ist ein Penta-Hexa-42-Eder.

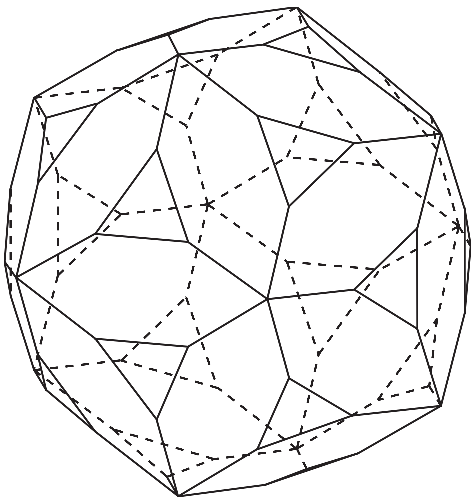
***dodek



Die 2 verschiedenen Winkel sind 122.56° und 116.57°.

K vom Ikosaeder ist ein Tri-Hexa-42-Eder.

***ikosak



Die 2 verschiedenen Winkel sind 148.27° und 63.44°.

Raumwinkel

Obschon der *Fussball* (=E1(Ikosaeder)) zwei verschiedene begrenzende Flächen hat (5- und 6-Ecke), sind alle Ecken gleich! Der für den Fussball charakteristische Raumwinkel der Ecken beträgt 33.81%.

Ich erinnere hier an die Formel für den *Raumwinkel* eines Trieders mit den Winkeln a, b und c zwischen den Kanten.

$$hs = \frac{a+b+c}{2}$$

$$tg(\frac{e}{4}) = \sqrt{tg(\frac{hs}{2})tg(\frac{hs-a}{2})tg(\frac{hs-b}{2})tg(\frac{hs-c}{2})}$$

$$RW = \frac{e}{4\pi}$$

Bei einer Ecke mit mehr als 3 Kanten muss das Problem in lauter Trieder aufgeteilt werden.

Beim *Rhombendodekaeder* hat es zwei verschiedene Raumwinkel:

die Ecke mit drei Kanten ist 25.00% (1/4) gross und

die Ecke mit vier Kanten ist 15.49% gross.

Beim *Rhombentriakontaeder* hat es zwei verschiedene Raumwinkel:

die Ecke mit drei Kanten ist 34.99% gross und

die Ecke mit fünf Kanten ist 25.00% gross.

Beim *F1(Würfel)* hat es zwei verschiedene Raumwinkel:

die Ecke mit vier Kanten ist 22.57% gross und

die Ecke mit sechs Kanten ist 22.1% gross.

Beim *F1(Dodekaeder)* hat es zwei verschiedene Raumwinkel:

die Ecke mit fünf Kanten ist 31.8% gross und

die Ecke mit sechs Kanten ist 31.56% gross.

Die Raumwinkel in den *regulären* Polyedern betragen

Tetraeder	4.39 %
Würfel	12.50 %
Oktaeder	10.82 %
Dodekaeder	23.57 %
Ikosaeder	20.97 %

Andere Raumwinkel sind

E1(Tetraeder)	15.20 %
E1(Würfel)	22.30 %
E1(Oktaeder)	25.00 %
E1(Dodekaeder)	30.81 %
E1(Ikosaeder)	33.81 %
Kubooktaeder	19.59 %
DodeIkosaeder	29.23 %

Beim *K(Tetraeder)* hat es zwei verschiedene Raumwinkel:

die Ecke ohne anstossendes Dreieck ist 12.5% (1/8) gross und

die Ecke mit anstossendem Dreieck ist 22.29% gross.

Beim *K(Würfel)* hat es zwei verschiedene Raumwinkel:

die Ecke ohne anstossendes Quadrat ist 25.00% gross und

die Ecke mit anstossendem Quadrat ist 29.16% gross.

Beim *K(Oktaeder)* hat es zwei verschiedene Raumwinkel:

die Ecke mit drei Kanten ist 31.87% gross und

die Ecke mit vier Kanten ist 15.49% gross.

Beim *K(Dodekaeder)* hat es zwei verschiedene Raumwinkel:

die Ecke am 5-Eck ist 36.18% gross und

die Ecke nicht am 5-Eck ist 35.00% gross.

Beim *K(Ikosaeder)* hat es zwei verschiedene Raumwinkel:

die Ecke mit drei Kanten ist 39.16% gross und

die Ecke mit fünf Kanten ist 25.00% gross.

Der Raumwinkel π

Man kann die Raumwinkel rw auch als *Oeffnungswinkel Ω eines Kegels mit gleichem Raumwinkel* ausdrücken. Die Beziehung lautet

$$\Omega = 2 \arccos(1 - 2\,\mathrm{rw})$$

$$\mathrm{rw} = \frac{1 - \cos(\Omega/2)}{2}$$

Es ist bemerkenswert, dass der häufig auftretende Raumwinkel 25% den runden Kegelwinkel Ω = 120° hat.

Wenn Raumwinkel als Oberflächenstück der Einheitskugel gemessen werden, dann hat der hier auffallende Raumwinkel genau den Betrag π.

Er tritt in den hier zusammengestellten Polyedern genau *sechsmal* auf.

Er tritt zweimal dort auf, wo 2 Winkel zu 120° und ein Winkel zu 90° zusammenstossen, im gleichkantigen 'Oktaeder mit abgeschliffenen Ecken' und im diagonal mit 60° gescherten Würfel.

Er tritt zweimal dort auf, wo 3 stumpfe Winkel der 1:√2 Raute zusammenstossen, im Rhombendodekaeder und im gleichkantigen 'Würfel mit abgeschliffenen Kanten'.

Er tritt zweimal dort auf, wo 5 spitze Winkel der goldenen Raute (2:(1+√5)) zusammenstossen, im Rhombotriakontaeder und im gleichkantigen 'Ikosaeder mit abgeschliffenen Kanten'.

Beziehungen zwischen den Operationen auf Polyedern

Satz 1

Wenn man die Operation E1 leicht eingeschränkt zusätzlich nach der Operation F2 ausführt, erhält man das gleiche Resultat wie mit der Operation K.

Kurz formuliert: E1 o F2 = K

Beispiele:

E1(F2(Tetraeder)) = E1(Würfel) = K(Tetraeder), wobei E1 nur jede zweite Ecke erfasst.

E1(F2(Würfel)) = K(Würfel), wobei E1 nur die vierkantigen Ecken erfasst. Daraus ergibt sich, dass der dreikantige Raumwinkel beim Rhombododekaeder und beim Quadra-Hexa-18-Eder der gleiche ist. Er beträgt 25%. Der stumpfe Winkel in der Raute des Rhombendodekaeders entspricht dem stumpfen Winkel im Hexagon des Quadra-Hexa-18-Eders (109.47°).

E1(F2(Oktaeder)) = K(Oktaeder), wobei E1 nur die dreikantigen Ecken erfasst. Daraus ergibt sich, dass der vierkantige Raumwinkel beim Rhombododekaeder und beim Tria-Hexa-Ikosaeder der gleiche ist. Er beträgt 1/6. Der spitze Winkel in der Raute des Rhombendodekaeders entspricht dem spitzen Winkel im Hexagon des Tria-Hexa-Ikosaeders (70.53° = 180° - 109.47°).

E1(F2(Dodekaeder)) = K(Dodekaeder), wobei E1 nur die fünfkantigen Ecken erfasst. Daraus ergibt sich, dass der dreikantige Raumwinkel beim Rhombentriakontaeder und beim Penta-Hexa-42-Eder der gleiche ist. Er beträgt 35%. Der stumpfe Winkel in der Raute des Rhombendodekaeders entspricht dem stumpfen Winkel im Hexagon des Penta-Hexa-42-Eders (122.56°).

E1(F2(Ikosaeder)) = K(Ikosaeder), wobei E1 nur die dreikantigen Ecken erfasst. Daraus ergibt sich, dass der fünfkantige Raumwinkel beim Rhombentriakontaeder und beim Tri-Hexa-42-Eder der gleiche ist. Er beträgt 25%. Der spitze Winkel in der Raute des Rhombentrikontaeders entspricht dem spitzen Winkel im Hexagon des Tri-Hexa-42-Eders (63.44° = 180° - 122.56°).

Satz 2

Wenn das Eckenabschleifen weitergetrieben wird (als E2), erhält man das gleiche wie beim Kantenschleifen, nur muss am dualen Polyeder gearbeitet werden.

Kurz formuliert: E3 (dual(x)) = K(x)

Satz 3

Die Operation KS := "In Kantenmitte die Senkrechte zur Kante und zum Radius errichten" führt zum dualen Polyeder.

Kurz formuliert: KS (x) = dual(x)

Satz 4

Die Operation D := "Je eine von zwei Flächendiagonalen nehmen" ist das Inverse von F2. Da F2 nicht 1-1-deutig ist, muss das Inverse präzisiert werden (welche der beiden Diagonalen).

Kurz formuliert: D (F2(x)) = x

Da F2 = 'Seitenmitten anheben bis Kanten verschwinden' aequivalent ist zu K2 = Kantenschleifen bis Seitenmitte', ist folgende Darstellung der Beziehungen symmetrischer

Abschleifen(senkrecht zum Radius)	Ecke	Kante
Partner	Kante	Seite
bis vor Partnermitte	E1	K1(=K)
bis genau Partnermitte	E2	K2(=F2)

Volumenanteil an der umschriebenen Kugel

Tetraeder	12.6 %
Würfel	36.9 %
Oktaeder	31.3 %
Dodekaeder	66.7 %
Ikosaeder	60.7 %
Rhombendodekaeder	47.7 %
Rhombentriakontaeder	69.4 %
Fussball	86.7 %

Natürlich nimmt dieser Volumenanteil mit der Anzahl Ecken des Polyeders zu. Obige Polyeder haben der Reihe nach 4, 8, 6, 20, 12, 14, 32 und 60 Ecken. Ausnahme: das Ikosaeder mit 12 Ecken hat mehr Volumenanteil als das Rhombendodekaeder mit seinen 14 Ecken.

Die Verwandtschaft mit der Kugel lässt sich natürlich auch mit anderen Kriterien messen. Etwa die mittlere quadratische Abweichung der Polyederoberfläche von der volumengleichen Kugel.

Das zentrale Dodekaeder

Auf dem Dodekaeder können 4 Ecken so ausgewählt werden, dass sie ein *Tetraeder* aufspannen.

Es gelingt auch, auf dem Dodekaeder 8 Ecken der 20 so auszuwählen, dass sie einen *Würfel* bilden.

6 geeignete Kantenmitten des Dodekaeders führen zum *Oktaeder*.

Das *Ikosaeder* entsteht aus dem Dodekaeder, indem die Flächenmitten als Ecken genommen werden (Dualität).

Andere Kennzahlen zu den regulären Polyedern

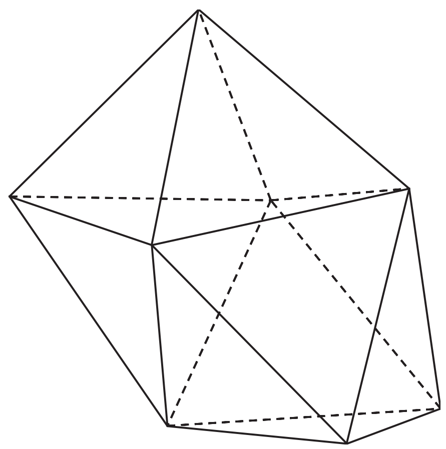
	Tetra	Kubus	Okta	Dode	Iko
Seitenlänge	1	1	1	1	1
Seitenfläche	0.43	1	0.43	1.72	0.43
Oberfläche	√3=1.73	6	3.46	20.7	8.66
Volumen	0.12	1	0.47	7.66	2.18
Radius der umschr.Kugel	0.61	√3/2	0.71	1.40	0.95
Radius der eingeschr.Kugel	0.20	0.50	0.41	1.11	0.76
maximaler Durchmesser	1	1.73	1.41	2.80	1.90
minimaler Durchmesser	0.71	1	0.82	2.23	1.51

Weniger regelmässige Polyeder

Triagonaldodekaeder

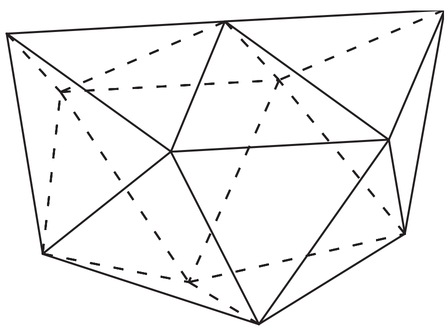
Das *Triagonaldodekaeder* hat ein Volumen von 0.86 und eine Oberfläche von 5.20. Ein Winkel zwischen den Seiten ist besonders flach mit 166.44°. Es gibt nur zwei verschiedene Raumwinkel in diesem Polyeder. Der 4-kantige beträgt 10.54% (Kegelwinkel Ω=76°) und der 5-kantige 18.41% (Ω=102°).

***tridode



Schiff

***schiff



Diesem Schiff kann man begegnen, wenn man das Ikosaeder aufbaut. Je 3 der oberen Dreiecke bilden ein flaches Trapez. Das Schiff kann mit Segmenten aus 8 Dreiecken und einem Quadrat (am Schiffsboden) beliebig verlängert werden.

Das nicht verlängerte Schiff hat ein Volumen von 1.6517 und eine Oberfläche von 7.794 (18 Dreiecke).

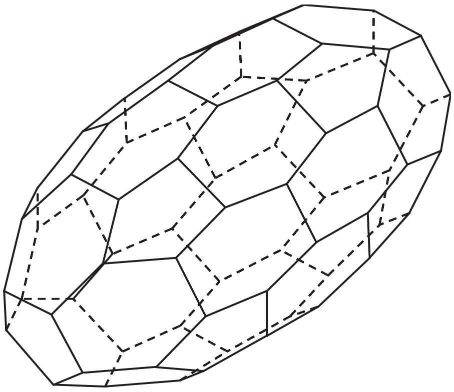
Es treten vier verschiedene Raumwinkel auf (die Kante von der Seite zur Firstmitte ist nicht echt):

1. die 4-kantige Spitze: 10.52% (75.71°)
2. die 4-kantige Seite: 17.75% (99.68°)
3. die 5-kantige Unterseite: 20.88% (108.77°)
4. die 5-kantige Mitte vorne: 20.54% (107.72°)

Rubgyball

Das *exakt gleichkantige C70* hat folgende Eigenschaften.

***c70



Ausser den Polpentagonen sind alle andern Polygone nicht mehr gleichwinkelig. Die Nichtpolpentagone haben einen spitzen Winkel von fast genau 70°. Die beiden andern Pentagonwinkel sind 141° und 94°. Wenn die Kante die Länge 1 hat, dann hat C70 eine Länge von ungefähr 7 und eine 'Dicke' von fast genau 4. Der spitze Winkel in den polarnahen Hexagonen beträgt 111°, in den aequatornahen 101° und in den aequatoriellen 104°.

Die Oberfläche von C70 beträgt 88.43 und das Volumen 47.19.

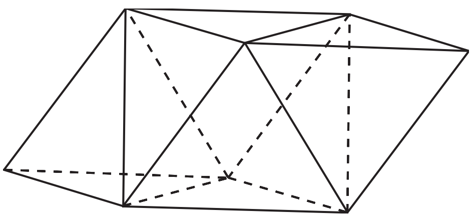
Die 5 verschiedenen Raumwinkel (vom Pol bis zu Aequator) betragen: 25.39%, 31.16%, 36.57%, 38.10% und 37.51%. Die entsprechenden Kegelöffnungswinkel sind: 121°, 136°, 149°, 152° und 151°.

Antiprismen

a) Triagonalantiprismen

a1) das Triagonalantiprisma mit 2 Dächern

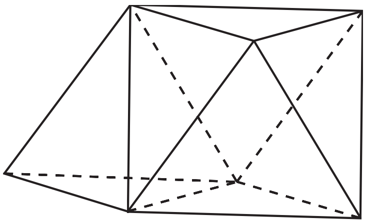
***3ap2



Dieses Polyeder ist ein schiefer Würfel ! Je zwei Dreiecke verbinden sich zu einer flachen Raute. Es hat ein Volumen von 0.70711 und eine Oberfläche von 5.19615. Es gibt zwei verschiedene Raumwinkel in diesem Polyeder. Der 3-kantige ist der Tretraederraumwinkel und beträgt 4.39% (Kegelwinkel Ω=48.36°) und der 5-kantige Raumwinkel, der eigentlich nur 3 Kanten hat, beträgt 15.20% (Ω=91.80°).

a2) das Triagonalantiprisma mit 1 Dach

***3ap1



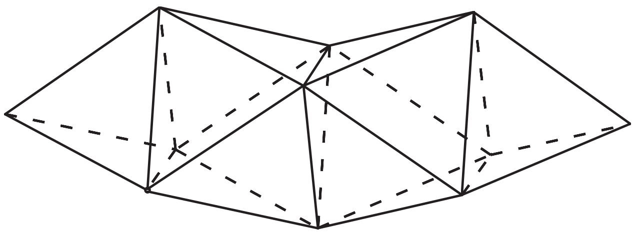
Dieses Polyeder hat ein Volumen von 0.59 und eine Oberfläche von 4.33. Es gibt drei verschiedene Raumwinkel in diesem Polyeder. Der 3-kantige ist der Tretraederraumwinkel und beträgt 4.39% (Kegelwinkel Ω=48.36°), der 4-kantige ist der Oktaederraumwinkel und beträgt 10.82% (Ω=76.81°) und der 5-kantige Raumwinkel, der eigentlich nur 3 Kanten hat, beträgt 15.20% (Ω=91.80°).

a3) das Triagonalantiprisma ohne Dach

Dieses Polyeder ist mit dem Oktaeder identisch !

a4) das mehrstöckige Triagonalantiprisma

***3ap2d



Für die Oberfläche des n-stöckigen Triagonalantiprisma mit 2 Dächern gilt

$$O = 2*1.29904 + n*2.59808$$

Für Volumen des n-stöckigen Triagonalantiprisma mit 2 Dächern gilt

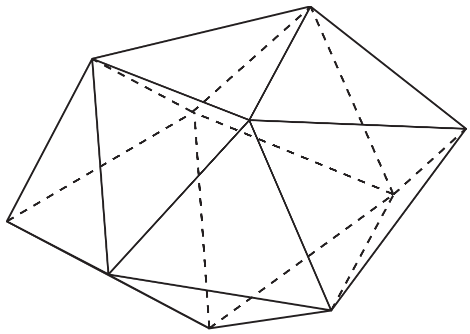
$$V = 2*0.11785 + n*0.47140$$

Für den hier neu hinzutretenden Raumwinkel, von dem 4 konvexe und 2 konkave Kanten weggehen, gilt, dass er einfach doppelt so gross ist wie der Raumwinkel des Triagonalantiprisma ohne Dach, das identisch ist mit dem Oktaeder, also 2*10.82 % = 21.64 %

b) Tetragonalantiprismen

b1) das Tetragonalantiprisma mit 2 Dächern

***4ap2

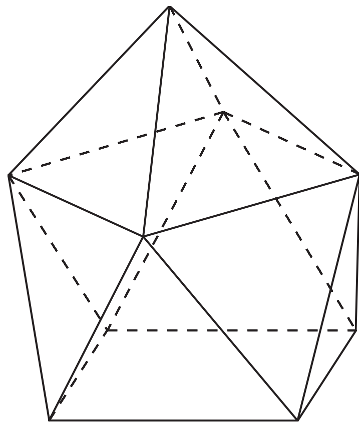


Dieses Polyeder hat ein Volumen von 1.428 und eine Oberfläche von 6.928. Es gibt nur zwei verschiedene Raumwinkel in diesem Polyeder. Der 4-kantige beträgt 10.82% (Kegelwinkel 76.81°) und der 5-kantige 19.68% (105.35°).

b2) das Tetragonalantiprisma mit 1 Dach

Dieses Polyeder hat 9 Ecken und wird von 12 gleichseitigen Dreiecken und einem Quadrat begrenzt. Wir haben also 13 Seitenflächen und 20 Kanten. In der Chemie nehmen Lanthanverbindungen gerne diese Geometrie an.

***4ap1



Das Volumen beträgt 1.19, die Oberfläche 6.196.

Es gibt drei verschiedene Raumwinkel:

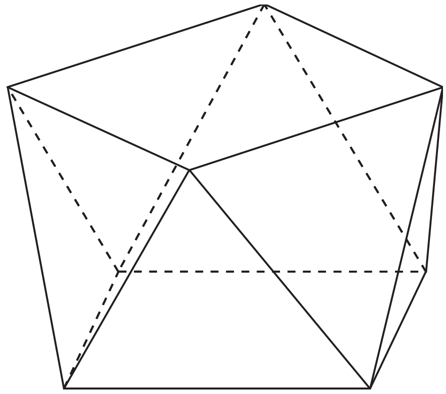
1. die regelmässige 4-kantige Ecke hat den Oktaederraumwinkel von 10.82% und ein entsprechender Kegel hätte einen Oeffnungswinkel von 76.81°.
2. die am Viereck anliegende Ecke hat einen Raumwinkel von 19.68% und ein entsprechender Kegel hätte einen Oeffnungswinkel von 105.35°.
3. die 5-kanige Ecke hat einen Raumwinkel von 14.27% und ein entsprechender Kegel hätte einen Oeffnungswinkel von 88.79°.

Der grösste Durchmesser geht von der regelmässigen 4-kantigen Ecke aus, überspringt eine Nachbarecke und beträgt 1.701.

Der die regelmässige Ecke überspringende Durchmesser beträgt $\sqrt{2}$=1.41 und der dritte Durchmesser 1.554.

b3) das Tetragonalantiprisma ohne Dach

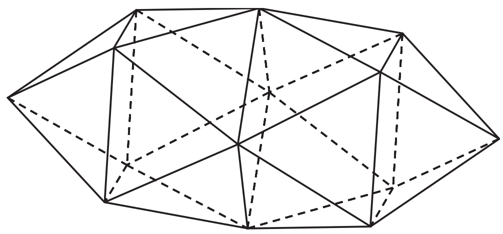
***4ap0



Dieses Polyeder hat ein Volumen von 0.9570 und eine Oberfläche von 5.46410. Es gibt nur einen Raumwinkel in diesem Polyeder. Er beträgt 19.68% und ein entsprechender Kegel hätte einen Oeffnungswinkel von 105.35°

b4) das mehrstöckige Tetragonalantiprisma

***4ap2d



Dieses Polyeder ist nicht konvex. Für die Oberfläche des n-stöckigen Tetragonalantiprisma mit 2 Dächern gilt

$$O = 1.73205 + n*3.46410$$

Für Volumen des n-stöckigen Tetragonalantiprisma mit 2 Dächern gilt

$$V = 2*0.2357 + n*0.9570$$

Für den hier neu hinzutretenden Raumwinkel, von dem 4 konvexe und 2 konkave Kanten weggehen, gilt, dass er einfach doppelt so gross ist wie der Raumwinkel des Tetragonalantiprisma ohne Dach, also 2*19.68% = 39.36 %

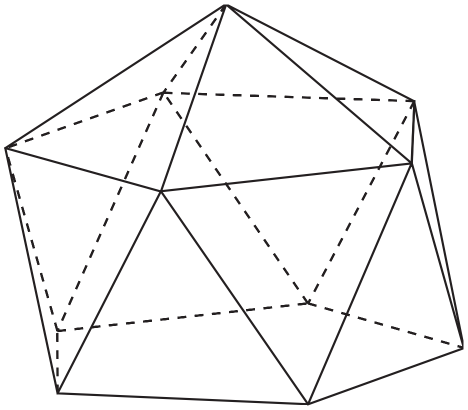
c) Pentagonalantiprismen

c1) das Pentagonalantiprisma mit 2 Dächern

Dieses Polyeder ist identisch mit dem Ikosaeder.

c2) das Pentagonalantiprisma mit 1 Dach

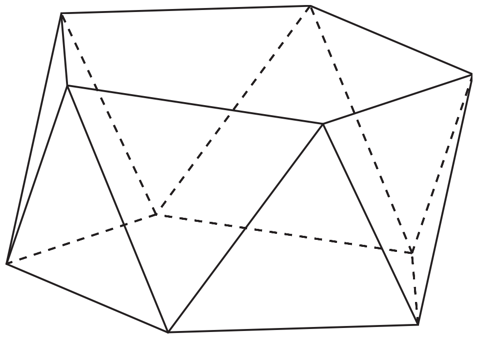
***5ap1



Dieses Polyeder hat ein Volumen von 1.88019 und eine Oberfläche von 8.2156. Es gibt nur zwei verschiedene Raumwinkel in diesem Polyeder. Der 4-kantige beträgt 16.39% (95.52°) und der 5-kantige ist der Ikosaederraumwinkel.

c3) das Pentagonalantiprisma ohne Dach

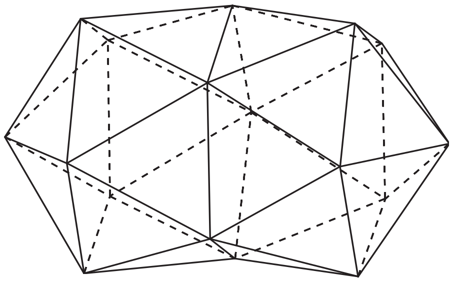
***5ap0



Dieses Polyeder hat ein Volumen von 1.57869 und eine Oberfläche von 7.7712. Es gibt nur einen Raumwinkel in diesem Polyeder. Er beträgt 16.39% (95.52°).

c4) das mehrstöckige Pentagonalantiprisma

***5ap2d



Dieses Polyeder ist nicht konvex. Für die Oberfläche des n-stöckigen Pentagonalantiprisma mit 2 Dächern gilt

$$O = 10*\sqrt{3}/4 * (1+n) = 4.3301*(1+n)$$

Für Volumen des n-stöckigen Pentagonalantiprisma mit 2 Dächern gilt

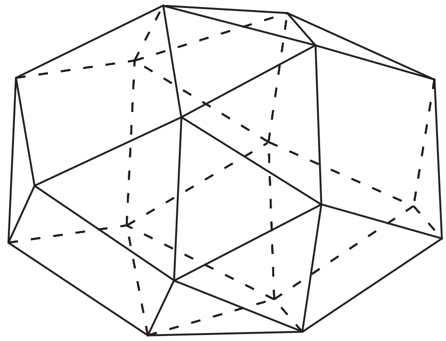
$$V = 2*0.30150 + n*1.57869$$

Für den hier neu hinzutretenden Raumwinkel, von dem 4 konvexe und 2 konkave Kanten weggehen, gilt, dass er einfach doppelt so gross ist wie der Raumwinkel des Pentagonalantiprisma ohne Dach, also 2*16.39% = 32.78 %

d) Hexagonalantiprismen

d1) das Hexagonalantiprisma mit 2 Dächern

***6ap2



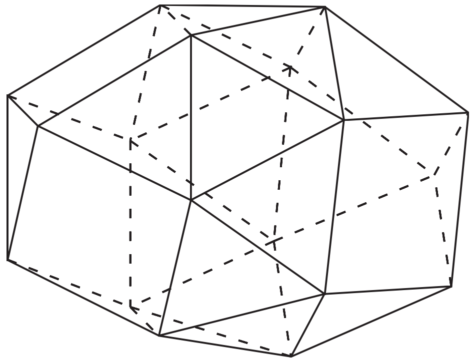
Die Dächer dieses Antiprismas sind je ein halbes Kubooktaeder. Die Oberfläche beträgt 14.66 und das Volumen 4.69.

Der hier neu hinzutretenden 5-kantige Raumwinkel beträgt 27.61% (126.79°).

Die Sequenz Quadrat-Dreieck-Dreieck-Quadrat hat "Z"-Form.

Dieses Polyeder ist gespiegelt nicht mehr das gleiche

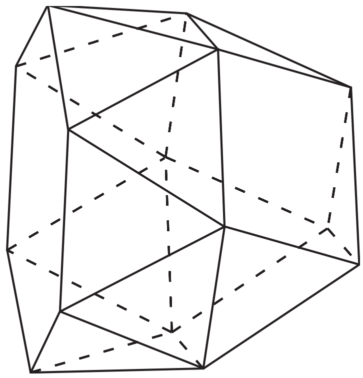
***6ap22



Die Sequenz Quadrat-Dreieck-Dreieck-Quadrat hat "S"-Form. Volumen, Oberfläche und Raumwinkel sind natürlich gegenüber der "Z"-Form unverändert.

d2) das Hexagonalantiprisma mit 1 Dach

***6ap1

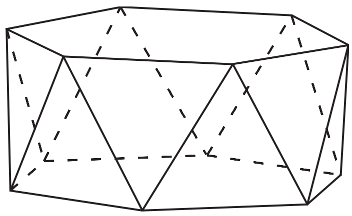


Die Oberfläche beträgt 12.53 und das Volumen 3.39.

Der hier neu hinzutretenden 4-kantige Raumwinkel beträgt 17.81% (99.85°).

d3) das Hexagonalantiprisma ohne Dach

***6ap0

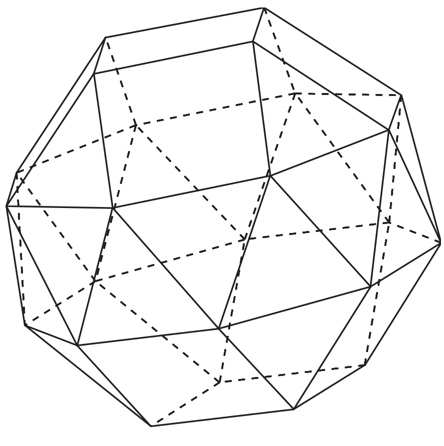


Die Oberfläche beträgt 10.39 und das Volumen 2.09.

e) Oktogonalantiprismen

e1) das Oktogonalantiprisma mit 2 Dächern

***8ap2



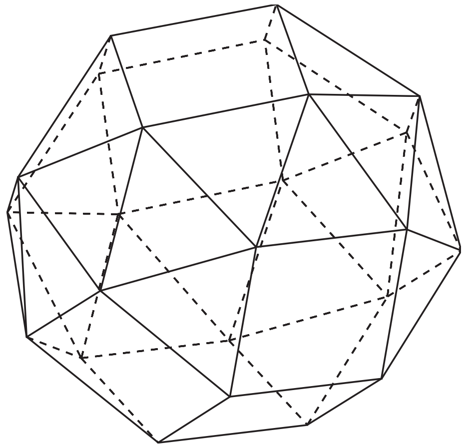
Die Dächer dieses Antiprismas sind dem Fugenoktaeder entlehnt. Die Oberfläche beträgt 20.39 und das Volumen 7.9126.

Der hier neu hinzutretenden 5-kantige Raumwinkel beträgt 28.55% (129.20°).

Die Sequenz Quadrat-Dreieck-Dreieck-Quadrat hat "Z"-Form.

Dieses Polyeder ist gespiegelt nicht mehr das gleiche

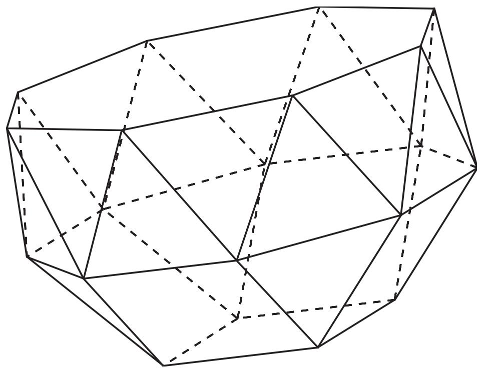
***8ap22



Die Sequenz Quadrat-Dreieck-Dreieck-Quadrat hat "S"-Form. Volumen, Oberfläche und Raumwinkel sind natürlich gegenüber der "Z"-Form unverändert.

e2) das Oktogonalantiprisma mit 1 Dach

***8ap1

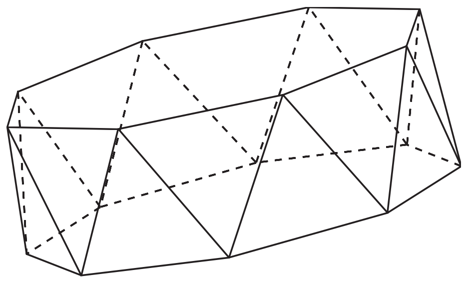


Die Oberfläche beträgt 18.49 und das Volumen 6.03.

Der hier neu hinzutretenden 4-kantige Raumwinkel beträgt 19.60% (105.11°).

e3) das Oktogonalantiprisma ohne Dach

***8ap0

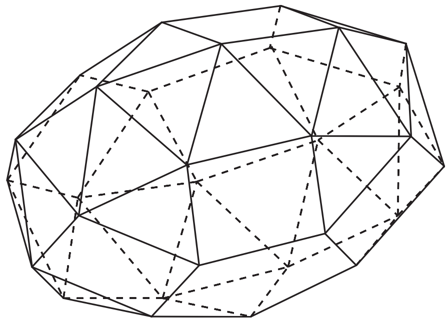


Die Oberfläche beträgt 16.59 und das Volumen 4.15.

f) Dekagonalantiprismen

f1) das Dekagonalantiprisma mit 2 Dächern

***10ap2



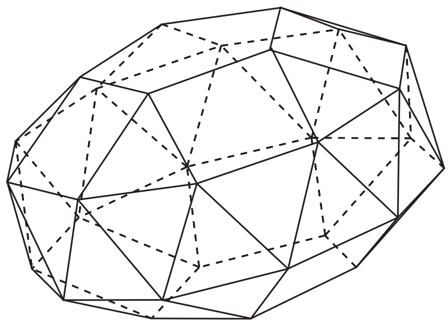
Die Dächer dieses Antiprismas sind dem Fugendodekaeder Typ 2 entlehnt. Die Oberfläche beträgt 26.43 und das Volumen 10.29.

Der hier neu hinzutretenden 5-kantige Raumwinkel beträgt 27.37% (126.18°).

Die Sequenz Quadrat-Dreieck-Dreieck-Quadrat hat "Z"-Form.

Dieses Polyeder ist gespiegelt nicht mehr das gleiche

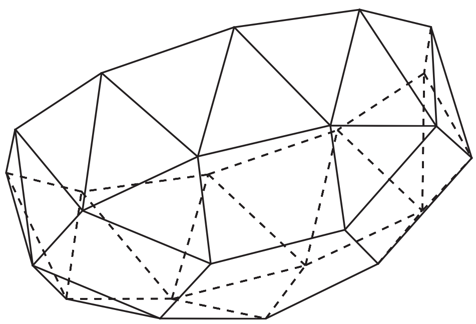
***10ap22



Die Sequenz Quadrat-Dreieck-Dreieck-Quadrat hat "S"-Form. Volumen, Oberfläche und Raumwinkel sind natürlich gegenüber der "Z"-Form unverändert.

f2) das Dekagonalantiprisma mit 1 Dach

***10ap1

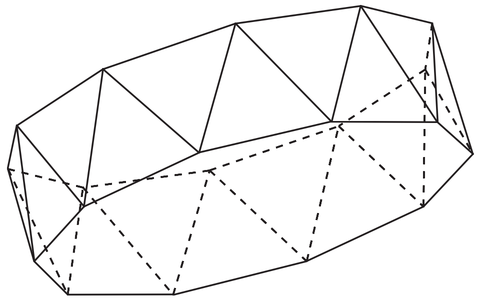


Die Oberfläche beträgt 25.24 und das Volumen 7.47.

Der hier neu hinzutretenden 4-kantige Raumwinkel beträgt 20.68% (108.18°).

f3) das Dekagonalantiprisma ohne Dach

***10ap0



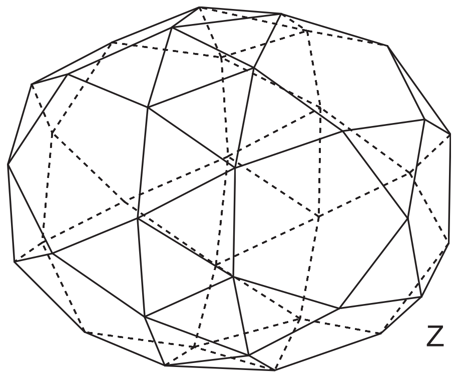
Die Oberfläche beträgt 24.04 und das Volumen 4.65.

g) Dekagonalantiprismen vom Typ 2

Man kommt zu einem zweiten Typ von Dekagonalantiprismen und -prismen, wenn man statt vom Fugendodekaeder Typ 2 auszugehen, die Hauben des E2(Dodekaeder), das auch eine Aequatorlinie kennt, verwendet.

g1a) das Dekagonalantiprisma vom Typ 2 mit 2 Dächern (S-Form)

***10app2



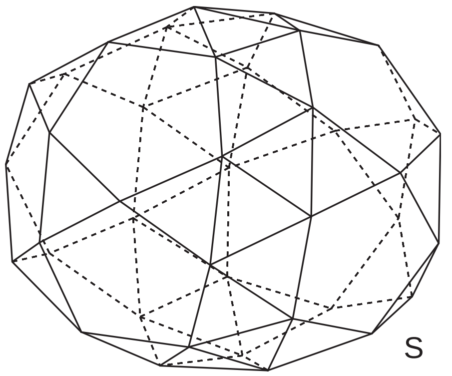
Die Oberfläche beträgt 43.32 und das Volumen 18.38.

Der hier neu hinzutretenden 5-kantige Raumwinkel beträgt 35.29% (145.79°).

Die Sequenz Pentagon-Dreieck-Dreieck-Pentagon hat "S"-Form.

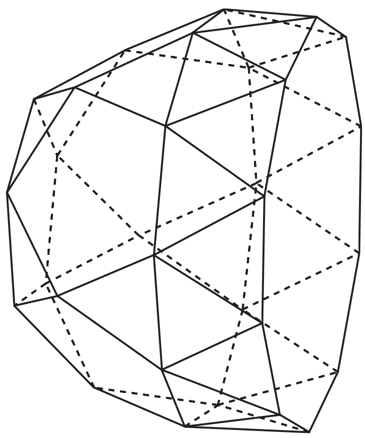
g1b) das Dekagonalantiprisma vom Typ 2 mit 2 Dächern gespiegelt (Z -Form)

***10app22



g2) das Dekagonalantiprisma vom Typ 2 mit 1 Dach

***10app1

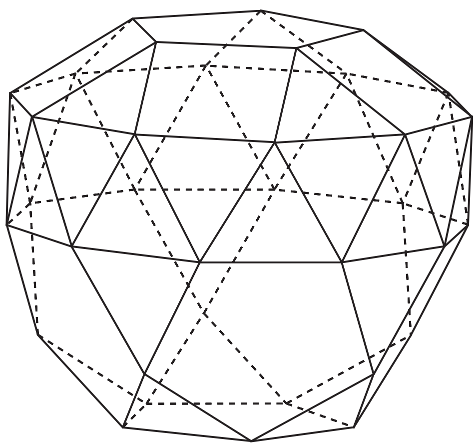


Die Oberfläche beträgt 36.36 und das Volumen 11.46.

Der hier neu hinzutretenden 4-kantige Raumwinkel beträgt 20.68% (108.18°).

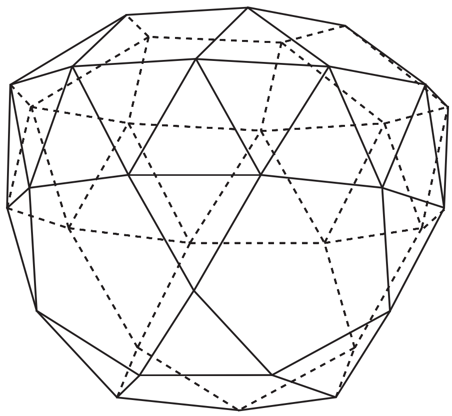
h) Mischantiprisma

***miap



Gegenüber den beiden Dekagonalantiprismen, die hier gemischt werden, treten keine neuen Raumwinkel auf. Oberfläche und Volumen sind der Mittelwert der entsprechenden Werte der beiden Dekagonalantiprismen und betragen 34.88 und 14.34. Die gespiegelte Version ist nicht deckungsgleich

***miap2

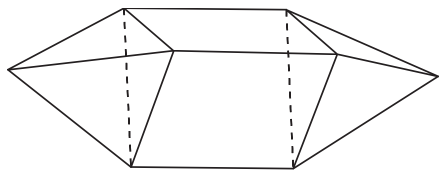


Prismen

1) Triagonalprismen

a1) Triagonalprisma mit 2 Dächern

***3p2



Volumen = 0.6687

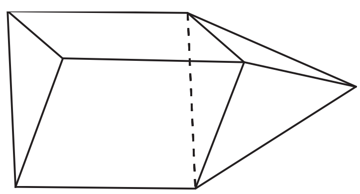
Oberfläche = 5.509

Pol-Raumwinkel wie Tetraeder

4-kantiger Raumwinkel = 10.75% (76.55°)

a2) Triagonalprisma mit 1 Dach

***3p1



Volumen = 0.5509

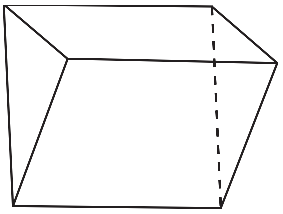
Oberfläche = 4.7321

Pol-Raumwinkel wie Tetraeder

3-kantiger Raumwinkel = 1/12 = 8.33% (67.11°)

a3) Triagonalprisma ohne Dach

***3p0



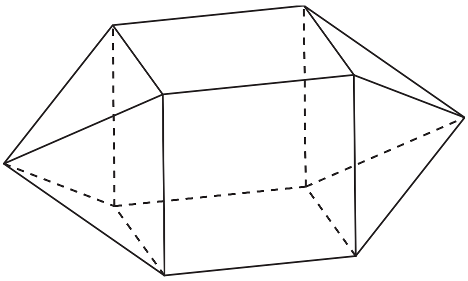
Volumen = 0.4330

Oberfläche = 3.866

b) Tetragonalprismen

b1) Tetragonalprisma mit 2 Dächern

***4p2



Volumen = 1.4714

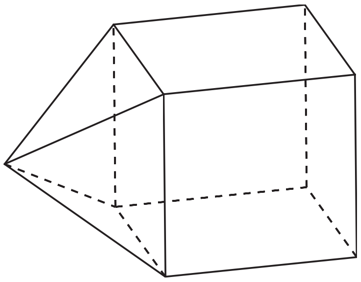
Oberfläche = 7.4641

Pol-Raumwinkel wie Oktaaeder

der andere Raumwinkel = 8.93% (69.65°)

b2) Tetragonalprisma mit 1 Dach

***4p1



Volumen = 1.2357

Oberfläche = 5.7321

3-kantiger Raumwinkel = 1/8 = 12.5%

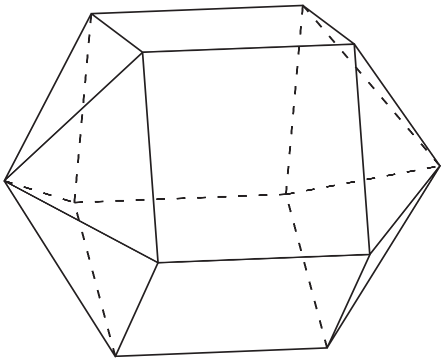
b3) Tetragonalprisma ohne Dach

Ist identisch mit dem Würfel.

c) Pentagonalprismen

c1) Pentagonalprisma mit 2 Dächern

***5p2



Volumen = 2.32

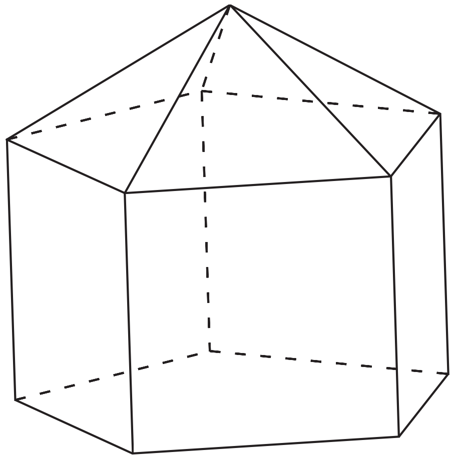
Oberfläche = 9.33

Pol-Raumwinkel wie Ikosaeder

4-kantiger Raumwinkel = 19.58% (105.04°)

c2) Pentagonalprisma mit 1 Dach

***5p1



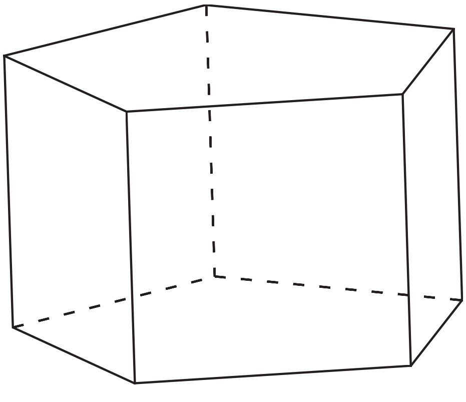
Volumen = 2.02

Oberfläche = 11.05

3-kantiger Raumwinkel = 15%

c3) Pentagonalprisma ohne Dach

***5p0



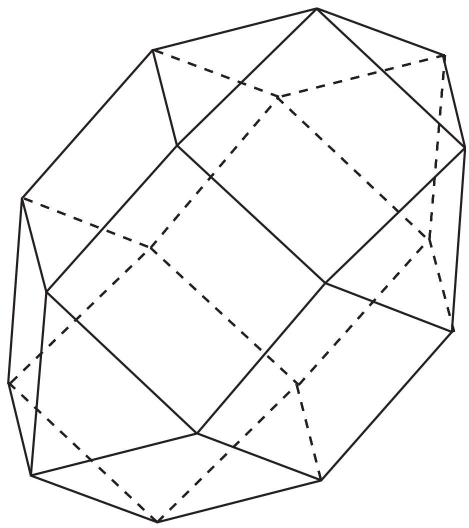
Volumen = 1.72

Oberfläche = 8.44

d) Hexagonalprismen

d1a) Hexagonalprisma mit 2 Dächern, 'verdreht'

***6p2



Volumen = 3.431

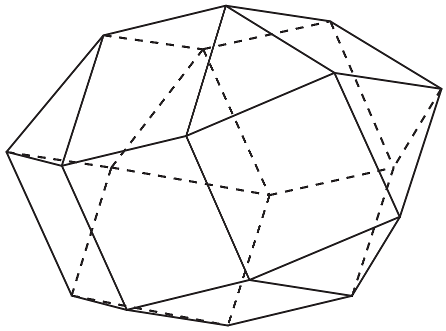
Oberfläche = 15.46

Pol-Raumwinkel = 19.59% (105.08°) wie Kubooktaeder

Aequatorial-Raumwinkel = 26.46% (123.83°)

d1b) Hexagonalprisma mit 2 Dächern, 'nicht verdreht'

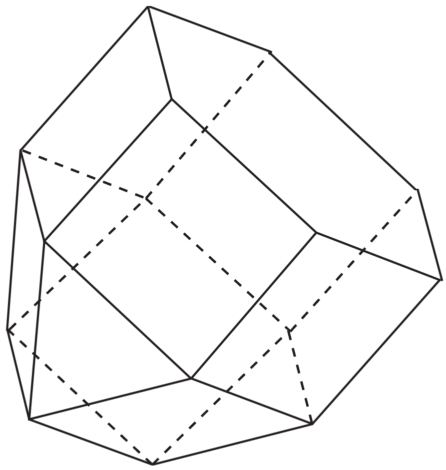
***6p22



Volumen, Oberfläche und Raumwinkel unverändert.

d2) Hexagonalprisma mit 1 Dach

***6p1



Volumen = 3.014

Oberfläche = 13.33

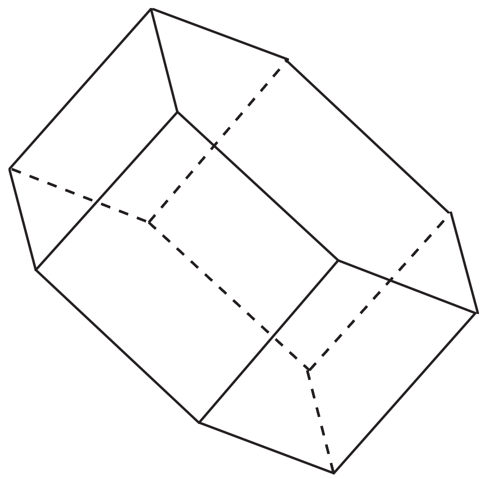
Pol-Raumwinkel = 19.59% (105.08°) wie Kubooktaeder

Aequatorial-Raumwinkel = 26.46% (123.83°)

3-kantiger Raumwinkel = 16.66% (1/6)

d3) Hexagonalprisma ohne Dach

***6p0



Volumen = 2.598

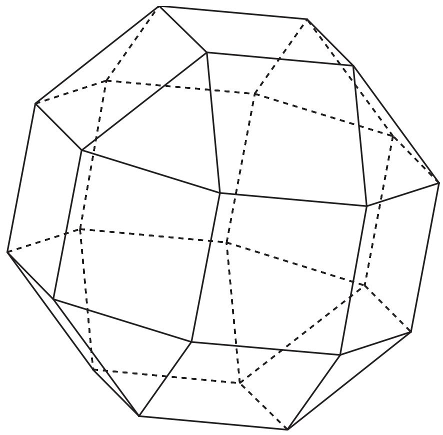
Oberfläche = 11.196

3-kantiger Raumwinkel = 16.66% (1/6)

e) Oktogonalprismen

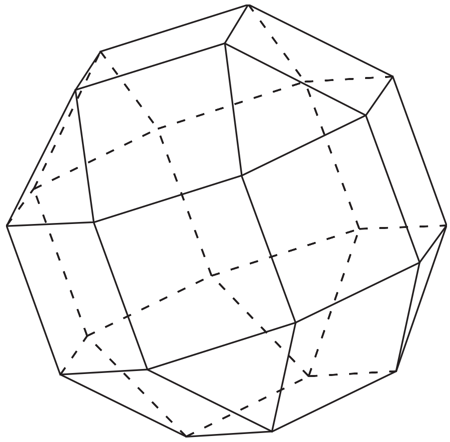
e1a) Oktogonalprisma mit 2 Dächern = RhombenKuboOktaeder

***8p2



e1b) Oktogonalprisma mit 2 Dächern, 'verdreht'

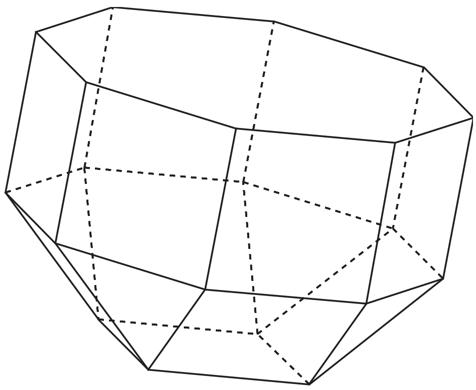
***8p22



Volumen, Oberfläche und Raumwinkel unverändert.

e2) Oktogonalprisma mit 1 Dach

***8p1

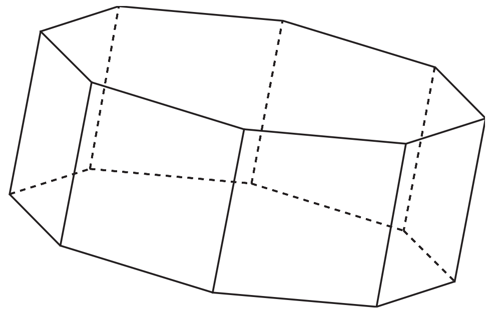


Die Oberfläche beträgt 19.56 und das Volumen 6.77.

Der hier neu hinzutretenden 3-kantige Raumwinkel beträgt genau 18.75% (102.64°).

e3) Oktogonalprisma ohne Dach

***8p0

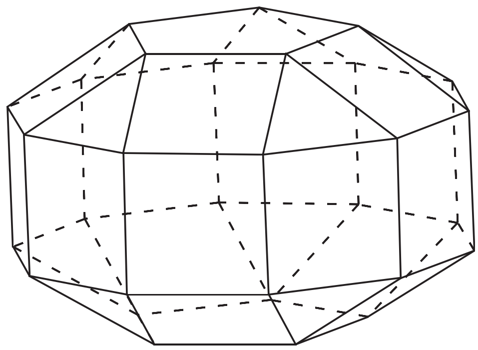


Die Oberfläche beträgt 17.66 und das Volumen 4.82.

f) Dekagonalprismen

f1a) Dekagonalprisma mit 2 Dächern

***10p2

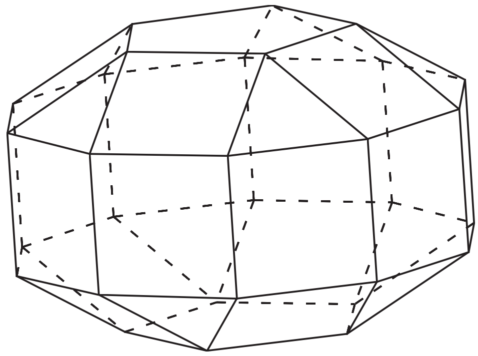


Die Dächer dieses Prismas sind dem Fugendodekaeder Typ 2 entlehnt. Die Oberfläche beträgt 27.77 und das Volumen 12.34.

Der hier neu hinzutretenden 4-kantige Raumwinkel beträgt 26.69% (124.43°).

f1b) Dekagonalprisma mit 2 Dächern, 'verdreht'

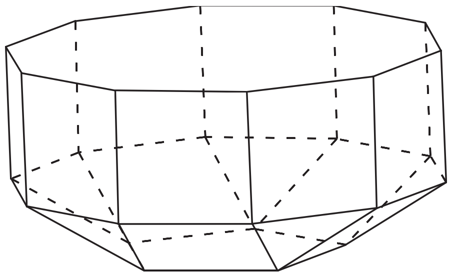
***10p22



Volumen, Oberfläche und Raumwinkel unverändert.

f2) Dekagonalprisma mit 1 Dach

***10p1

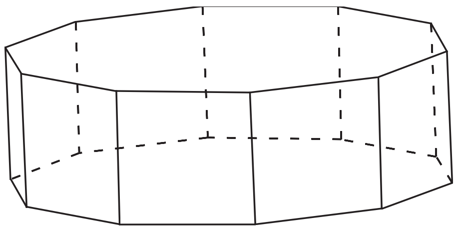


Die Oberfläche beträgt 26.58 und das Volumen 10.02.

Der hier neu hinzutretenden 3-kantige Raumwinkel beträgt genau 20.00% (106.26°).

f3) Dekagonalprisma ohne Dach

***10p0

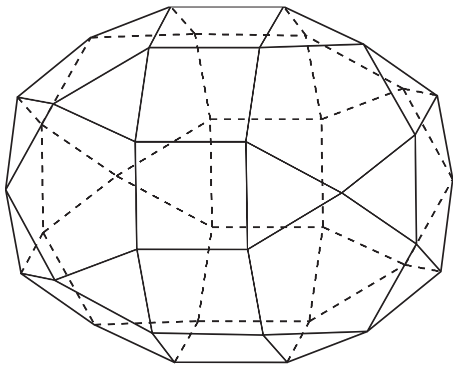


Die Oberfläche beträgt 25.39 und das Volumen 7.69.

g) Dekagonalprismen vom Typ 2

g1a) das Dekagonalprisma vom Typ 2 mit 2 Dächern

***10pp2

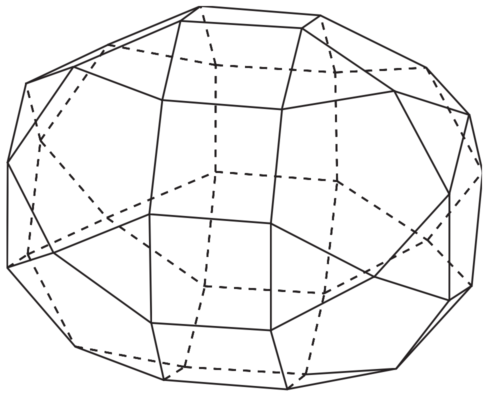


Die Oberfläche beträgt 39.306 und das Volumen 21.53.

Der hier neu hinzutretenden 4-kantige Raumwinkel beträgt 34.62% (144.16°).

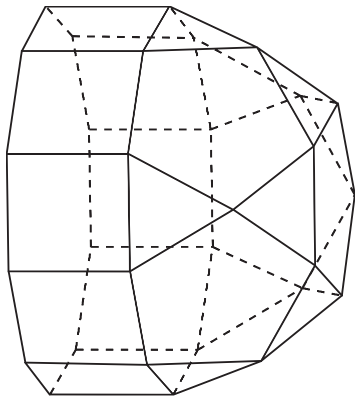
g1b) das Dekagonalprisma vom Typ 2 mit 2 Dächern verdreht

***10pp22



g2) das Dekagonalprisma vom Typ 2 mit 1 Dach

***10pp1



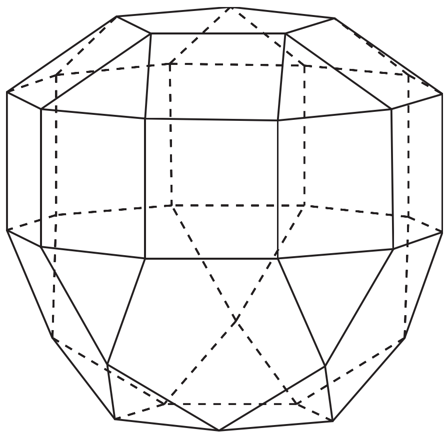
Die Oberfläche beträgt 32.347 und das Volumen 14.61.

Der hier neu hinzutretenden 3-kantige Raumwinkel beträgt 20%.

h) Mischprisma

h1) Mischprisma normal

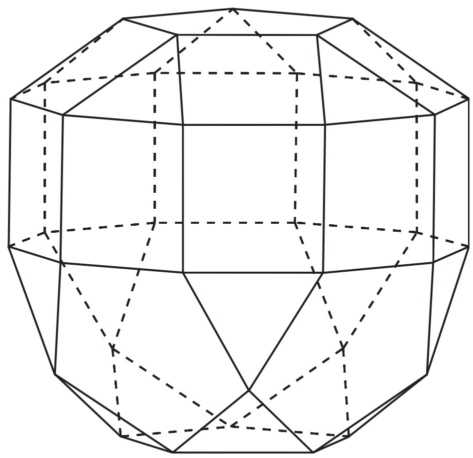
***mip



Gegenüber den beiden Dekagonalprismen, die hier gemischt werden, treten keine neuen Raumwinkel auf. Oberfläche und Volumen sind der Mittelwert der entsprechenden Werte der beiden Dekagonalantiprismen und betragen 33.54 und 16.94.

h2) Mischprisma verdreht

***mip2



Fugenpolyeder

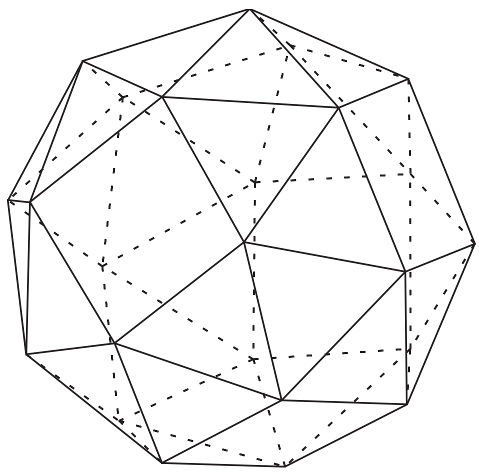
Durch folgende Operation kann man weitere gleichkantige konvexe Polyeder gewinnen.

Man nehme ein reguläres Polyeder und entferne die Seiten vom Polyeder gleichzeitig vom Polyedermittelpunkt. Dabei behalten die Seiten ihre Grösse. Auch die Orientierung der Ebenen, in die die Seiten eingebettet sind, muss beibehalten werden. Hingegen dürfen die Seiten innerhalb dieser Ebenen drehen! Man gehe soweit bist die entstehenden Fugen mit gleichseitigen Dreiecken oder/und Quadraten aufgefüllt werden können.

Beim Tetraeder führt diese Operation zum Ikosaeder. Beim Oktaeder müssen die Fugen mit Quadraten gefüllt werden. Beim Ikosaeder geht die Operation nicht. Kubus, Oktaeder und Dodekaeder werden zu sehr schönen Polyedern, die nur eine einzige Art von Ecken haben.

a) Fugenwürfel

***FugKub



Der Fugenwürfel hat 24 Ecken, 42 Seiten (36 Dreiecke und 6 Vierecke) und 66 Kanten.

Die Konstruktion erfolgte wie folgt. Die Ebenenwinkel w1 zwischen Viereck und Dreieck und w2 zwischen Dreieck und Dreieck wurden variert bis im Teilgefüge bestehend aus Viereck und 3 Dreiecken, wobei ein Dreieck dem Viereck nicht benachbart ist, die freistehende Ecke Distanz 1 zum nächsten Nachbarn hat. Mit dem Winkel w2 kann dann ein Meridian aus Dreiecken aufgebaut werden, aus dem durch 90° Rotationen der Fugenwürfel entsteht.

Die Oberfläche beträgt $O = 32 * \sqrt{3}/4 + 6*1 = 19.86$

Das Volumen beträgt V = 7.89

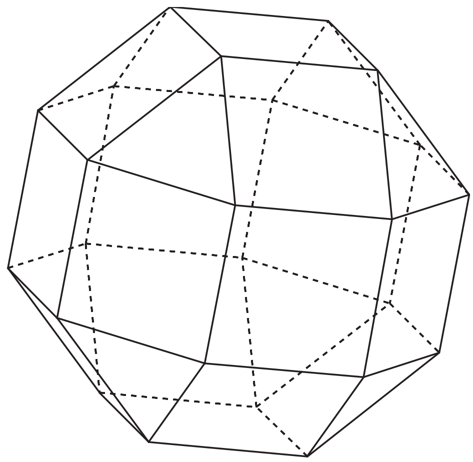
Es gibt nur einen Raumwinkel und er beträgt 28.56% (91.80°)

Der Winkel, den die Viereckseite mit der Kante des umschriebenen Würfels bildet, beträgt 16.47°.

Zwei opponierende Vierecke sind um 32.93° gegeneinander verdreht.

b) Fugenoktaeder

***8p2



Die Oberfläche beträgt O = 21.46

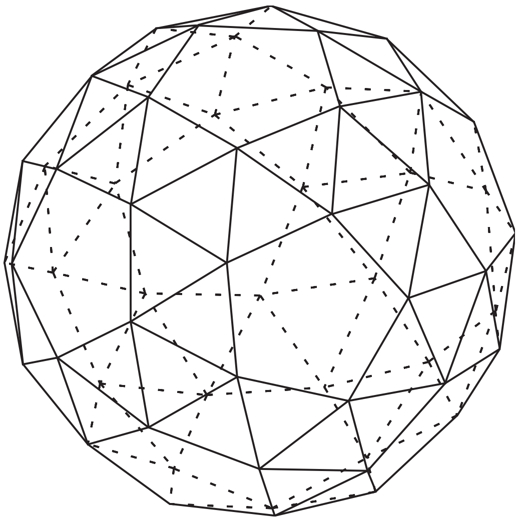
Das Volumen beträgt V = 8.71

Es gibt nur einen Raumwinkel und er beträgt 27.7% (127.04°)

Ein kleinerer Durchmesser beträgt 2.414 und der grössere 2.798.

c) Fugendodekaeder Typ 1

***FogDode



Dieses Polyeder hat 60 Ecken, 92 Seiten (80 Dreiecke und 12 Fünfecke) und 150 Kanten.

Die Konstruktion erfolgte wie folgt. Die Ebenenwinkel w1 zwischen Fünfeck und Dreieck und w2 zwischen Dreieck und Dreieck wurden variert bis im Teilgefüge bestehend aus Fünfeck und 3 Dreiecken, wobei ein Dreieck dem Fünfeck nicht benachbart ist, die freistehende Ecke Distanz 1 erhält und dort ebenfalls ein Ebenenwinkel w2 entsteht. Mit dem Winkel w2 kann dann ein Meridian aus Dreiecken aufgebaut werden, aus dem durch 72° Rotationen das Fugendodekaeder entsteht.

Die Oberfläche beträgt O =80*√3/4 +12*O(Fünfeck) =55.29.

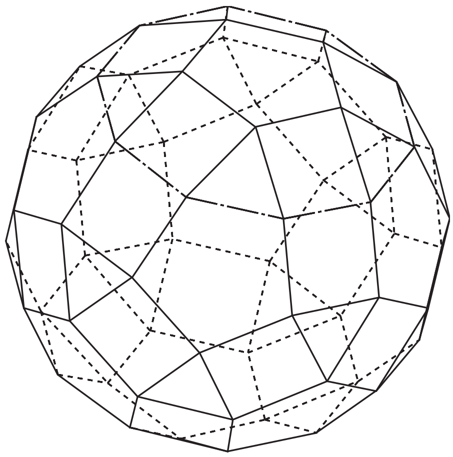
Das Volumen beträgt V = 37.62.

Es gibt nur einen Raumwinkel und er beträgt 35.89% (147.21°).

Zwei opponierende Fünfecke sind um 9.79° gegeneinander verdreht.

d) Fugendodekaeder Typ 2

***FugDode2



Für dieses Polyeder wurden die Fugen mit Drei- *und Vierecken* ausgefüllt.

Das Polyeder hat 60 Ecken, 62 Seiten (20 Dreiecke, 30 Vierecke und 12 Fünfecke) und 120 Kanten.

Die Oberfläche beträgt O = 59.31.

Das Volumen beträgt V = 41.61.

Es gibt nur zwei Raumwinkel, nämlich den Typ 5-4-3-4 und den Typ 5-4-4-3. Sie sind beide gleich gross und betragen 35.38% (146°).

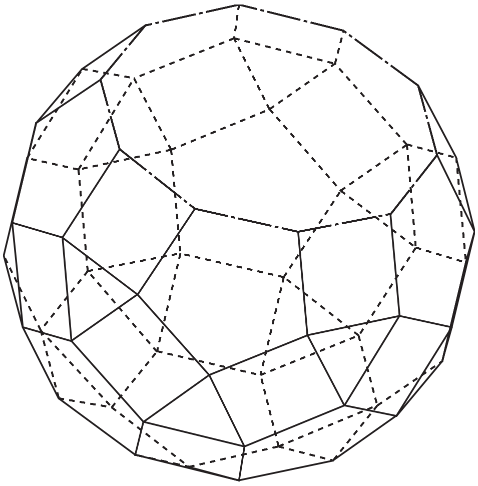
Es gibt 5 Varianten für dieses Polyeder, weil die durch strichpunktierte Linie angedeutete *Haube* einen zehneckigen Rand hat, der in einer Ebene liegt, und damit *gedreht* werden kann. Es können nicht alle zwölf verschiedenen Hauben unabhängig voneinander verdreht werden, weil eine Art Verriegelung stattfindet. Nur nicht überlappende Hauben können dies. Es gibt nur 5 Konstellationen von nicht überlappenden Hauben: 1) keine, 2) eine, 3) zwei opponierende, 4) zwei nicht opponierende und 5) drei Hauben. In der Illustration wird die Variante 2) gezeigt.

e) Amputierte Fugendodekaeder vom Typ 2

Die *Hauben* des Fugendodekaeders vom Typ 2 können auch auf 4 verschiedenen Arten *weggelassen* und durch ein Dekagon ersetzt werden.

e1) Einfach amputiertes Fugendodekaeder vom Typ 2

***FuDo2T1

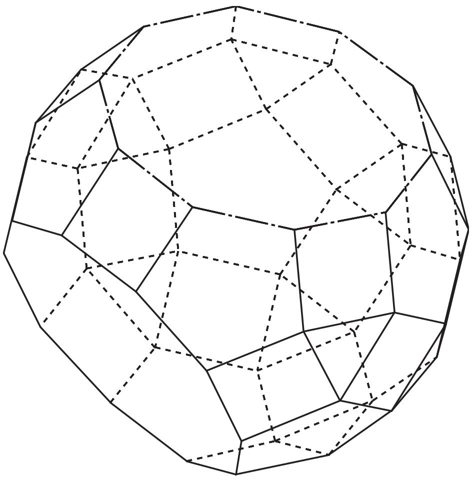


Der neu hinzutretende 3-kantige Raumwinkel beträgt 28.69% (129.55°), die Oberfläche 50.42 und das Volumen 34.25.

e2) Zweifach amputiertes Fugendodekaeder vom Typ 2

Die zwei abgeschnittenen Hauben sind benachbart.

***FuDo2T2

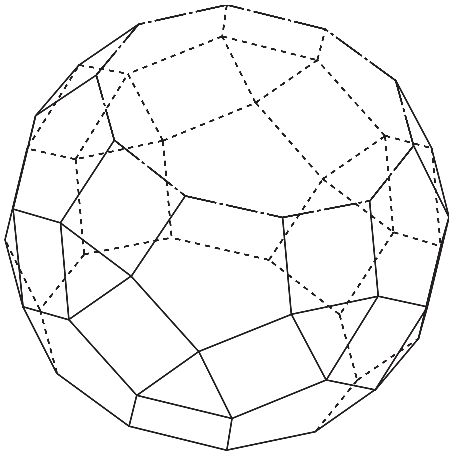


Die Oberfläche beträgt 41.53 und das Volumen 26.89.

e3) Zweifach amputiertes Fugendodekaeder vom Typ 2 (Opposition)

Die zwei abgeschnittenen Hauben stehen in Opposition zueinander.

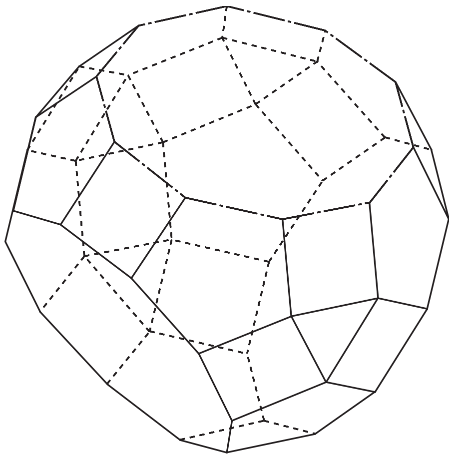
***FuDo2T2b



Die Oberfläche beträgt 41.53 und das Volumen 26.89.

e3) Dreifach amputiertes Fugendodekaeder vom Typ 2

***FuDo2T3



Die Oberfläche beträgt 32.65 und das Volumen 19.53.

f) Diverses

Das *FugenIkosaeder*, dessen Fugen mit 4- und 5-Ecken gefüllt wird, ist identisch mit dem Fugendodekaeder vom Typ 2.

Der *Fugenwürfel*, dessen Fugen mit 3- und 4-Ecken gefüllt wird, ist identisch mit dem Fugenoktaeder.

Eine Haube des Fugenoktaeders mit in einer Ebene liegendem oktogonalem Rand kann als Dach bei den Prismen und Antiprismen verwendet werden (siehe 8AP0,1,2).

Eine Haube des Fugendodekaeders des Typs 2 mit in einer Ebene liegendem dekagonalem Rand kann als Dach bei den Prismen und Antiprismen verwendet werden (siehe 10AP0,1,2).

Diese beiden Hauben können auch auf die oktogonalen Seiten des abgestumpften Würfels b.z.w. auf die dekagonalen Seiten des abgestumpften Dodekaeders gesetzt werden. Es stellt sich heraus, dass die Nahtstellen alle flach ausfallen!

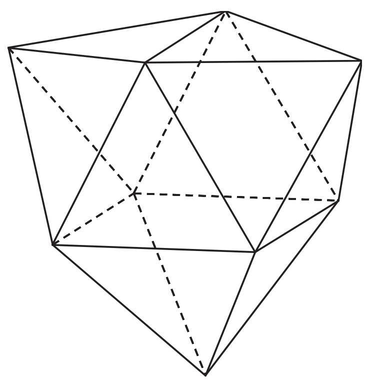
Die flachen, zusammengesetzten Seiten der entstehenden Polyeder können systematisch vergrössert werden. Es entstehen zwei Polyederfamilien, die ich *Okta-* und *Ikosa-Familie* nennen möchte, weil sie bei unendlicher Vergrösserung zum Oktaeder und zum Ikosaeder streben: Oktamitglied-1 = Fugenoktaeder, das Oktamitglied-2 hat Dreiecke, die aus 6 Elementardreiecken bestehen, das Oktamitglied-3 hat Dreiecke, die aus 10 Elementardreiecken bestehen u.s.w. Das gleiche gilt für die Ikosa-Familie. Die Vierecke wachsen dabei nicht zweidimensional, sondern nur eindimensional und ergeben die relativ immer weniger abgestumpften Kanten des Grenzpolyeders. Die Eckenvierecke (b.z.w. die Eckenpentagone bei der Ikosa-Familie) wachsen überhaupt nicht.

Es entstehen keine andern Raumwinkel mehr als wir sie in den Repräsentanten Fugenoktaeder und Fugendodekaeder (Typ 2) bereits berechnet haben.

Triagonalprisma mit aequatorialen Pyramiden

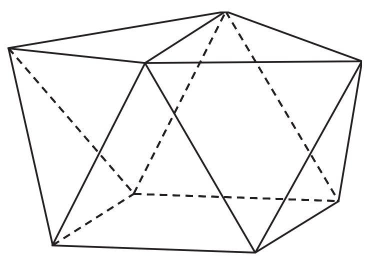
Man kann einem 3-Prisma statt auf den Polen (siehe 3p2, 3p1) am Aequator Pyramiden aufsetzen. Bei *drei* Pyramiden erhält man ein Volumen von 1.14 und eine Oberfläche von 6.06. Ein Winkel zwischen den Seiten ist besonders flach mit 169.47°. Es gibt nur zwei verschiedene Raumwinkel in diesem Polyeder. Der 4-kantige beträgt, wie im Oktaeder, 10.82% und der 5-kantige 19.15% (103.81°).

***okta153



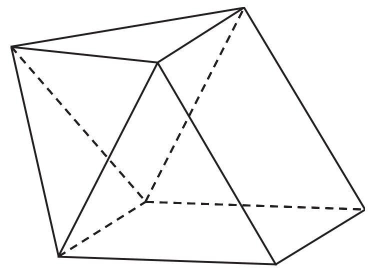
Die Variante mit nur *zwei* Pyramiden hat ein Volumen von 0.90 und eine Oberfläche von 5.33. Es tritt ein neuer Raumwinkel dazu. Es ist derjenige am Viereck. Er beträgt 13.74% (87.04°).

***okta152



Die Variante mit nur *einer* Pyramiden hat ein Volumen von 0.67 und eine Oberfläche von 4.60. Es tritt ein neuer Raumwinkel dazu. Es ist derjenige an zwei Vierecken. Er beträgt 8.33% (67.11°).

***okta151



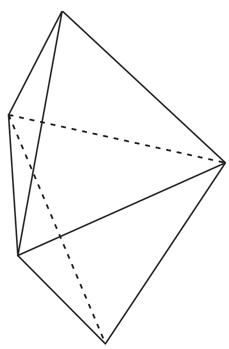
Doppeldächer

Man könnte die Doppeldächer auch in die Prismen (oder Antiprismen) einteilen: 2 Dächer ohne Gurt.

a) dreieckig

Das folgende dreieckige Doppeldach hat ein Volumen von 0.24 und eine Oberfläche von 2.60. Es gibt nur zwei verschiedene Raumwinkel in diesem Polyeder. Der 4-kantige beträgt, wie im Tetraeder, 4.39% und der 4-kantige 8.77% .

***3dd



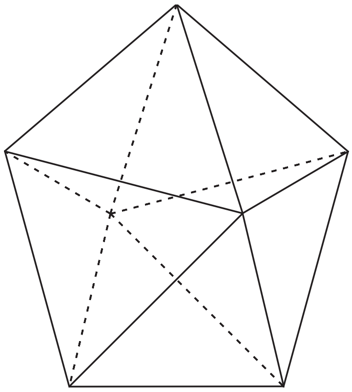
b) viereckig

Ist identisch mit dem Okateder.

c) fünfeckig

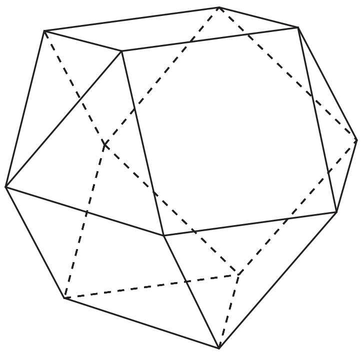
Das folgende fünfeckige Doppeldach hat ein Volumen von 0.60 und eine Oberfläche von 4.33. Es gibt nur zwei verschiedene Raumwinkel in diesem Polyeder. Der 4-kantige beträgt 9.15% und der 5-kantige 20.97%.

***5dd



d) sechseckig

***6dd

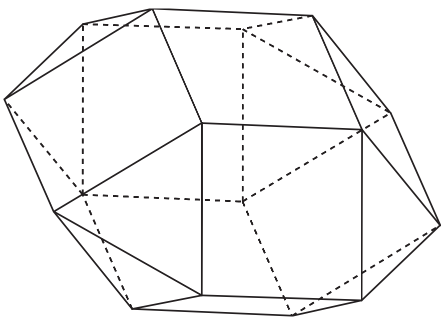


Es gibt zwei solche Polyeder. Das andere ist gegenüber diesem 'verdreht' und entspricht dem Kubooktaeder. Volumen, Oberfläche und Raumwinkel bleiben gleich.

e) achteckig

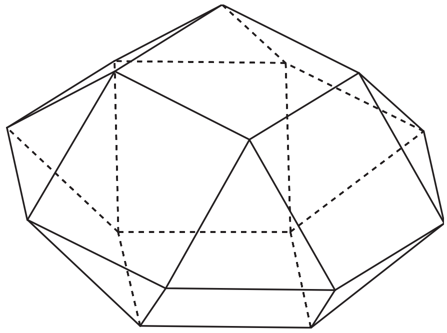
Das folgende achteckige Doppeldach hat ein Volumen von 4.04 und eine Oberfläche von 13.46. Es gibt nur zwei verschiedene Raumwinkel in diesem Polyeder. Der aequatoriale beträgt 17.91% (100.14°) und der andere 27.7% (127.04°).

***8dd



Es gibt zwei solche Polyeder. Volumen, Oberfläche und Raumwinkel bleiben gleich. Hier die zweite Version:

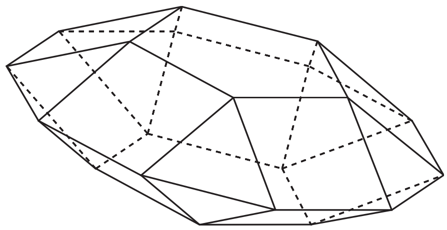
***8dd2



f) zehneckig

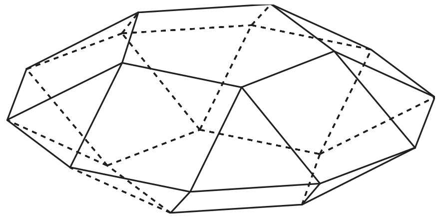
Das folgende zehneckige Doppeldach hat ein Volumen von 4.66 und eine Oberfläche von 17.77. Es gibt nur zwei verschiedene Raumwinkel in diesem Polyeder. Der aequatoriale beträgt 13.39% (85.84°) und der andere 35.38% (146°).

***10dd



Es gibt zwei solche Polyeder. Volumen, Oberfläche und Raumwinkel bleiben gleich. Hier die zweite Version:

***10dd2



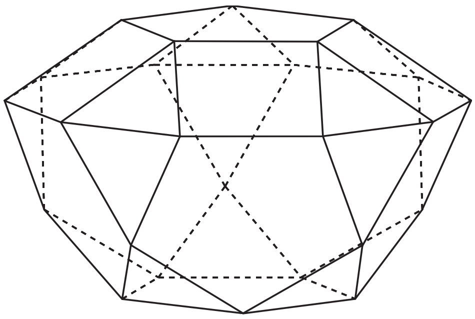
g) zehneckig Typ 2

Ist identisch mit dem DodeIkosaeder = E2(Dode).

h) gemischt

h1) normal

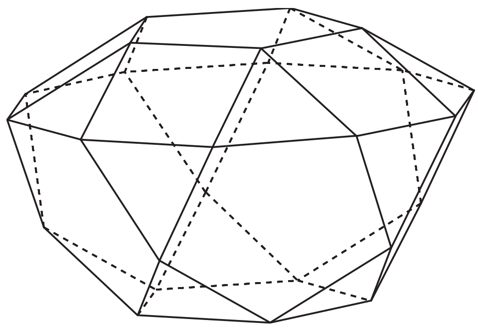
***midd



Der hier gegenüber MischP neu auftretende Raumwinkel am Aequator ist 6.69% (59.97°). Das Volumen beträgt 9.25 und die Oberfläche 23.54.

h2) gemischt verdreht

***midd2



Raumwinkel, Oberfläche und Volumen wie h1).

Pyramiden

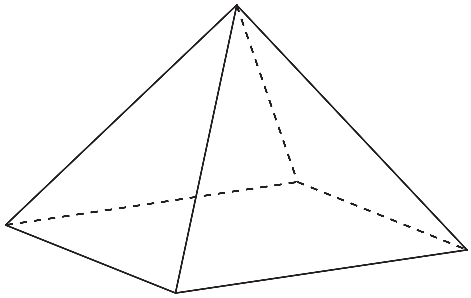
Man könnte die Pyramiden auch in die Prismen (oder Antiprismen) einteilen: 1 Dach ohne Gurt.

a) 3Pyramide

Ist identisch mit dem Tetraeder.

b) 4Pyramide

***4pyr



Volumen = 0.235 (Oktaeder/2)

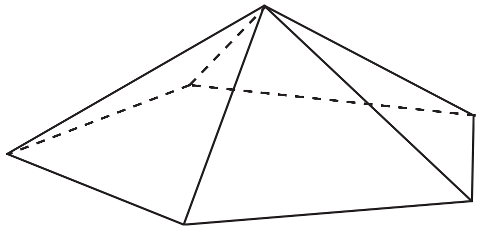
Oberfläche = 2.732

3-kantiger Raumwinkel = 5.41% (53.79°) (Oktaeder/2)

4-kantiger Raumwinkel = 10.82% (Oktaeder)

c) 5Pyramide

***5pyr



Volumen = 0.3015

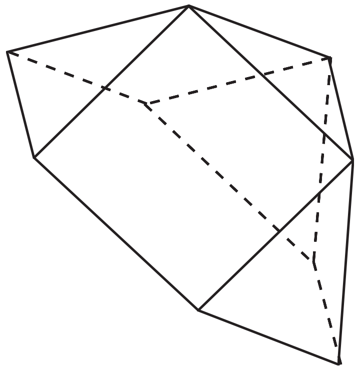
Oberfläche = 3.886

3-kantiger Raumwinkel = 9.15% (70.43°)

5-kantiger Raumwinkel = 20.97% (Ikoseader)

d) 6Pyramide

***6pyr



Volumen = 0.4165

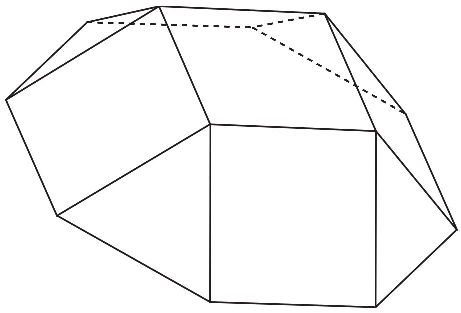
Oberfläche = 7.33

3-kantiger Raumwinkel = 9.8% (72.96°)

4-kantiger Raumwinkel = 19.59 % (Kubooktaeder)

e) 8Pyramide

***8pyr



Volumen = 2.02

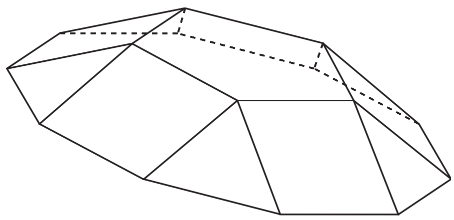
Oberfläche = 11.56

3-kantiger Raumwinkel = 8.95%

4-kantiger Raumwinkel = 27.7% (127.04°) (Fugenokta-eder)

f) 10Pyramide

***10pyr



Volumen = 2.33

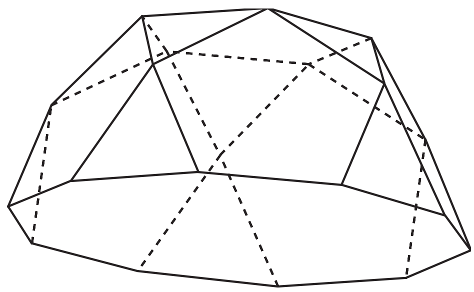
Oberfläche = 16.58

3-kantiger Raumwinkel = 6.70%

4-kantiger Raumwinkel = 20.97%   (Fugendode II)

g) 10Pyramide Typ 2

***10pyrr



Volumen = 6.92

Oberfläche = 22.35

3-kantiger Raumwinkel = 14.62% (89.91°)

Fastpolyeder

Wenn man aus einem Hexagon und einem Kranz aus Pentagonen einen Korb bildet und anschliessend einen gleichen Korb darüberstülpt, bleiben am Aequator rautenförmige Lücken, die man gut mit einem Paar Dreiecken füllen kann.

Erst eine kleine Rechnung in analytischer Geometrie zeigt, dass dieses *linsenförmige* Polyeder zwar mit dem Polydronbaukasten mit etwas Spannung gut zusammensetzbar ist, mathematisch aber nicht existiert. Der Winkel zwischen dem Pentagonrand und der Senkrechten beträgt 60.93° statt 60°!

Ein *Raumschiff* kann man bauen, wenn beim sechseckigen Prisma hinten und vorne je zwei Vierecke wegnimmt, an den verbleibenden seitlichen Vierecken je zwei Dreiecke flach anschliesst und dann mit je vier goldenen Rauten einen Bug- und Heckspitz baut. Die goldenen Rauten sind die Rauten des Triakontarhombendodekaeders, deren Achsen das Verhältnis des goldenen Schnittes aufweisen. Auch hier haben wir Stress: das 60° Dreieck wird in eine Lücke mit dem spitzen Winkel der goldenen Raute gezwungen, der mit 63.435° nahe bei 60° liegt.

Scherkörper

Beim Scheren eines *Würfels* können die Kantenlängen natürlich gewahrt werden. Wenn bei den dabei entstehenden Rauten nur diejenigen erlaubt werden, die wir im Rhombendodekaeder (Diagonalverhältnis √2:1), im Triakontaeder (Diagonalverhältnis im goldenen Schnitt (1+√5)/2 : 1) und im Triagonalantiprisma (Spitzwinkel 60°) angetroffen haben, dann ergeben sich folgende sechs Scherkuben

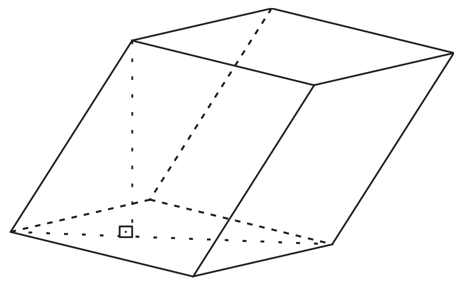
1. bei *diagonaler* Scherung Scher11, Scher12 und Scher13
2. bei *kantenparalleler* Scherung Scher31, Scher32 und Scher33

Es kann auch ein *Dreiprisma* geschert werden, wobei man Scher21, Scher22 und Scher23 erhält.

a) Diagonal gescherte Würfel

a1) Scher11 (Rautendiagonalverhältnis √2:1)

**scher11



Dieses Polyeder entspricht dem Wurzel(2)-S-Hexaeder aus Nachtrag 3.

a2) Scher12 (goldenes Rautendiagonalverhältnis)

Dieses Polyeder entspricht dem goldenen S-Hexaeder aus Nachtrag 3.

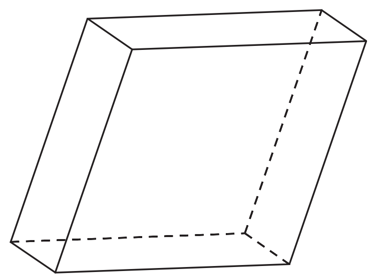
a3) Scher13 (Spitzer Winkel 60°)

Dieses Polyeder entspricht dem Triagonalantiprisma mit 2 Dächern.

b) Kantenparallel gescherte Würfel

b1) Scher21 (Rautendiagonalverhältnis √2:1)

**scher21



Der stumpfe Raumwinkel unten beträgt 9.56% (72.04°), der spitze unten 6.54% (59.28°) , der stumpfe oben 12.17% (81.66°) und der spitze oben 5.62% (54.88°). Die Oberfläche misst 5.7517 und das Volumen 0.266.

b2) Scher22 (goldenes Rautendiagonalverhältnis)

Der stumpfe Raumwinkel unten beträgt 9.77% (72.85°), der spitze unten 5.79% (55.70°) , der stumpfe oben 14.10% (88.23°) und der spitze oben 4.78% (50.52°). Die Oberfläche misst 5.6549 und das Volumen 0.247.

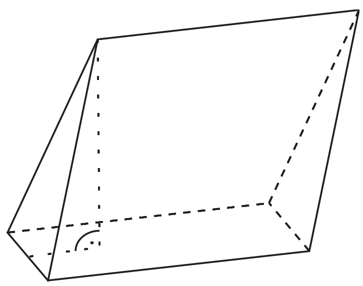
b3) Scher23 (Spitzer Winkel 60°)

Der stumpfe Raumwinkel unten beträgt 9.80% (72.96°), der spitze unten 5.41% (53.79°) , der stumpfe oben 15.20% (91.80°) und der spitze oben 4.39% (48.36°). Die Oberfläche misst 5.5981 und das Volumen 0.236.

c) Geschertes 3Prisma

c1) Scher31(Rautendiagonalverhältnis √2:1)

***scher31



Der stumpfe Raumwinkel beträgt 15.20% (91.80°) und der spitze 9.80% (72.96°). Der Raumwinkel von 9.80%, in dem die Winkel 90°, 90° und ca. 110° zusammenstossen, ist bereits in Scher23 aufgetreten, aber in anderer Art mit den zusammenstossenden Winkeln 60°, 90° und 120°. Die Oberfläche misst 5.886 und das Volumen 0.9428.

c2) Scher32 (goldenes Rautendiagonalverhältnis)

Der stumpfe Raumwinkel beträgt 16.19% (94.90°) und der spitze 8.81% (69.07°). Die Oberfläche misst 5.789 und das Volumen 0.894.

c3) Scher33 (Spitzer Winkel 60°)

Der stumpfe Raumwinkel beträgt 16.67% = 1/6 (96.38°) und der spitze 8.33% = 1/12 (67.11°). Die Oberfläche misst 5.732 und das Volumen 0.866.

Baukasten

Die Gleichkanter legen es nahe, einen attraktiven Baukasten zusammen zu stellen, der aus regelmässigen Polygonen aus Plastik besteht, deren Kanten zu einer Scharnier eingeschnappt werden können.

Dieser Baukasten ist schon auf dem Markt unter dem Namen POLYDRON. Verteiler in der Schweiz ist VIVISHOP, Lausanne. In Deutschland (MUED) ist ein Modell KLICKIES auf dem Markt.

Die nicht gleichwinkligen Hexagone der Reihe K(x) sind in diesen Baukästen nicht realisiert.

Diverses

Beim Rhombentriakontaeder liegen die 5-kantigen Ecken 9.86% weiter vom Zentrum entfernt als die 3-kantigen.

Die Kugeln der dichtesten *Kugelpackung* (mit Wiederholung erst in der vierten Schicht) füllen den Raum zu 74%.

Wenn sie aufgeblasen werden, bis die Lücken gefüllt sind, dann werden sie zu *Rhombendodekaedern*.

Die *Bienenwabe* ist ein halbes Rhombendodekaeder! Siehe auch Kracke, 'Mathemusische Knobelisken', S. 249 und 'Bild der Wissenschaft' 10, 1986.

Wenn die Polyeder als *Fachwerke* aufgefasst werden mit beweglichen Verbindungen, dann scheinen mir nur der Kubus, das Rhombendodekaeder und Rhombentriakontaeder flexibel zu sein. Beim letzten ist das nicht so evident, es sind aber alle nicht unnötig langen Wege zum Antipoden gleichlang.

Mit F1 gewinnt man gleichflächige, aber nicht gleichkantige Polyeder. Beim Oktaeder und beim Ikosaeder fallen sie nicht konvex aus.

Dass das Eckenabschleifen bis zur Kantenmitte E2 beim Tetraeder zum Oktaeder führt, kann durch Zählen der neuen Ecken und Kanten eingesehen werden. Jede der 6 Tetraederkanten ergibt eine Ecke im neuen Gebilde. In jeder der 4 Tetraederseiten ergeben sich 3 Kanten für das neue Gebilde, also 4x3=12 Kanten. Wegen der Isotropie muss es das Oktaeder sein.

Beim 'Flächenzentren anheben F2' am Tetraeder geht die Rechnung wie folgt. 4 alte Ecken plus 4 neue ergeben 8 Ecken. Die alten 6 Kanten verschwinden und es entstehen 4x3=12 neue Kanten. Das neue Gebilde ist also der Würfel.

Inhaltsverzeichnis